1. Sinqulyar inteqral tənliklər nəzəriyyəsindən bəzi məlumatlar.

$$K^0 Y \equiv K_0 Y + RY = f \qquad (1.1)$$

sinqulyar inteqral tənliyinə baxaq, burada

$$K_0 Y(t) \equiv a(t)Y(t) + \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Y(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

$$RY(t) \equiv \int_{-1}^{1} R(t,\tau)Y(\tau)d\tau,$$

burada a, b, f və R (hər iki arqumentə görə) - $H([-1,1])$ sinfinə daxil olan funksiyalar, bütün $t \in [-1,1]$ üçün $a^2(t) + b^2(t) > 0$.

$a(t) \equiv 0$ və $b(t) \neq 0$ olduqda (1.1) tənliyi *I növ sinqulyar inteqral tənlik* adlanır. Ümumiliyi pozmadan I növ tənlik üçün $b(t) \equiv 1$ qəbul edəcəyik.

(1.1) tənliyinə uyğun olan $K_0 Y = f$ tənliyi xarakteristik sinqulyar inteqral tənlik adlanır.

(1.1) tənliyinin həlli $H^*([-1,1])$ sinfində axtarılır. $\Phi \subset H^*([-1,1])$ (1.1) tənliyinin bütün həllər çoxluğu *h_0, $h(-1)$, $h(1)$* və *$h(-1,1)$* siniflərinə bölünür. *h_0* – [-1,1] parçasının uclarının yaxınlığında qeyri-məhdud olan $H^*([-1,1])$-yə daxil olan funksiyalar sinfidir; *$h(-1)$ ($h(1)$)* – $H^*([-1,1])$ sinfindən olan, -1 ucu (1 ucu) yaxınlığında məhdud funksiyalar sinfidir; *$h(1,1)$* – $H^*([-1,1])$ sinfindən olan, -1 və 1 ucları yaxınlığında məhdud funksiyalar sinfidir. Bu siniflərin hər birinə özünün kanonik funksiyası uyğudur.

Tutaq ki,

$$\theta(t) = \frac{1}{\pi}\arg(a(t) + ib(t))$$

$\frac{1}{\pi}\arg(a(t) + ib(t))$ çoxqiymətli funksiyasının hər hansı kəsilməz və birqiymətli budağıdır.

Onda belə bir

$$X(z) = (1-z)^p(-1-z)^q \exp(-\int_{-1}^{1}(\tau - z)^{-1}\theta(\tau)d\tau), \quad z \in [-1,1]$$

kimi kanonik funksiyaya və

$$Z(t)=(1-t)^p(1+t)^q\exp\left(-\int_{-1}^{1}(\tau-t)^{-1}\theta(\tau)d\tau\right),\quad t\in(-1,1)$$

kimi fundamental funksiyaya baxaq, burada *p* və *q* – tam ədədlərdir və h_0 sinfində $-1<p-\theta(1)<0$, $-1<q+\theta(-1)<0$ şərtlərinə, *h(-1)* sinfində $-1<p-\theta(1)<0$, $0<q+\theta(-1)<1$ şərtlərinə, *h(1)* sinfində $0<p-\theta(1)<1$, $-1<q+\theta(-1)<0$ şərtlərinə, *h(1,1)* sinfində isə $0<p-\theta(1)<1$, $0<q+\theta(-1)<1$ şərtlərinə tabedirlər.

Əgər $\theta(1)$ $(\theta(-1))$ – tam ədədlərdirsə onda *p (q)* birqiymətli təyin olunur, $p=\theta(1)$ $(q=-\theta(-1))$. $\chi=-(p+q)$ ədədi (1.1) tənliyinin (K^0 operatorunun) indeksi adlanır.

Aydındır ki,

$\rho(t)=z(t)/r(t)$ və $\omega(t)=1/z(t)r(t)$ (burada $r(t)=\left(a^2(t)+b^2(t)\right)^{1/2}$)

funksiyaları aşağıdakı şəkildədirlər:

$$\rho(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\Omega_1(t),$$

$$\omega(t)=(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\Omega_2(t).$$

Burada $\alpha=p-\theta(1)$, $\beta=q+\theta(-1)$ qəbul olunub. $\Omega_1(t)=\Omega(t)/r(t)$ və $\Omega_2(t)=1/\Omega(t)r(t)$ isə mənfi deyillər və [-1,1] - də inteqrallanandırlar,

$$\Omega_j(\pm1)=\lim_{t\to\pm1}\Omega_j(t)\neq0,\qquad j=1,2$$

$$\Omega(t)=\exp\left\{(\theta(1)-\theta(t))\ln(1-t)+(\theta(t)-\theta(-1))\ln(1+t)-\right.$$

$$\left.-\int_{-1}^{1}\frac{\theta(\tau)-\theta(t)}{\tau-t}d\tau\right\}.$$

Həqiqi sabit əmsallar üçün, h_0 sinfində $a\neq0$, $b\neq0$, $(a^2+b^2=1)$, $-1<\theta=\frac{1}{\pi}\arg(a+ib)<1$, $z(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$, $\omega(t)=1/z(t)$, $\alpha=p-\theta$, $\beta=q+\theta$, $\chi=1$; *h(-1)* və *h(1)* siniflərində $\chi=0$; *h(1,1)* sinfində isə $\chi=-1$. I növ inteqral tənlik üçün h_0 $(\chi=1)$ sinfində $(a=0,\ b=1)$, $\theta=1/2$, $z(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$, $\omega(t)=(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}$, $\alpha=\beta=-1/2$; *h(-1)* *h(1)* $(\chi=0)$ sinfində $-\alpha=\beta=1/2$ $(\alpha=-\beta=1/2)$; *h(1,1)* $(\chi=-1)$ sinfində $\alpha=\beta=1/2$.

h_0 , *h(-1)*, *h(1)* və *h(1,1)* siniflərində (1.1) tənliyinin həlli naməlum *u(t)* funksiyasına nəzərən

$$K^0(\rho u)(t)=f(t)\qquad(1.2)$$

sinqulyar inteqral tənliyinin həllinə gətirilir, burada $\rho(t) = z(t)/r(t)$ və $z(t)$ - uyğun fundamental funksiyadır.

Teorem 1.1. Əgər $\chi > 0$, onda

$$K^0(\rho u)(t) = f(t) \tag{1.3}$$

tənliyinin

$$\int_{-1}^{1} \rho(\tau)\tau^k u(\tau)d\tau = D_k, \quad k = 0,1,2,...,\chi - 1 \tag{1.4}$$

şərtləri ödəndikdə (burada D_0, D_1, D_2,..., $D_{\chi-1}$ verilmiş həqiqi sabitlərdir)

$$U(t) = B(\omega f)(t) + b(t)\,Q_{\chi-1}(t)$$

yeganə həlli var, burada

$$B(x)(t) \equiv a(t)x(t) - \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

$\chi - 1$ dərəcəli $Q_{\chi-1}(t)$ polinomunun c_0, c_1, c_2,..., $c_{\chi-1}$ əmsalları isə aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sistemindən təyin olunur:

$$\sum_{s=0}^{\chi-1} c_s \int_{-1}^{1} \rho(\tau)\tau^{s+\nu} b(\tau)d\tau = D_\nu, \qquad \nu = 0,1,2,...,\chi - 1 \tag{1.5}$$

Əgər $\chi = 0$ olarsa, onda (1.3) tənliyinin yeganə $u(t) = B(\omega f)(t)$ həlli var.

Əgər $\chi < 0$ olarsa, onda (1.3) tənliyi yalnız və yalnız o halda həll olunandır ki,

$$\int_{-1}^{1} \omega(\tau)\tau^{k-1} f(\tau)\,d\tau = 0, \qquad k = 1,2,...,\chi$$

şərtləri ödənilsin. Bu zaman da (1.3) tənliyinin yeganə həlli $u(t) = B(\omega f)(t)$ düsturu ilə verilir.

$\chi > 0$ olduqda (1.4) şərtlərinin köməyi ilə (1.3) tənliyinin yeganə həllinin necə ayrılmasına baxaq. $\chi > 0$ olduqda (1.3) tənliyinin bütün həlləri $u(t) = B(\omega f)(t) + b(t)Q_{\chi-1}(t)$ düsturu ilə verilir. Burada $Q_{\chi-1}$ ilə dərəcəsi $\chi - 1$-dən böyük olmayan ixtiyari çoxhədli işarə edilmişdir. Buradan alınır ki, həllin yeganəliyi üçün χ üzərinə əlavə şərtlər qoymaq lazımdır. Belə şərtlər kimi (1.4)-ün momentləri ρu funksiyaları götürülür.

Göstərək ki, $Q_{\chi-1}(t)$ çoxhədlisinin c_0, c_1, c_2,..., $c_{\chi-1}$ əmsalları (1.5) xətti cəbri tənliklər sistemindən birqiymətli təyin olunurlar. Aydındır ki, uyğun bircins sistemin ($D_0 = D_1 = D_2 = ... = D_{\chi-1} = 0$) yalnız sıfır həllinin olmasına əmin olmaq kifayətdir. Axırıncı (1.3) tənliyinin $u(t) = B(\omega f)(t)$ həllinin yeganəliyindən alınır.

Teorem 1.1-dən belə bir nəticə çıxır ki, $\chi < 0$ olduqda (1.3) tənliyi ümumiyyətlə desək həll olunan deyil.

Teorem 1.2. Əgər $\chi < 0$ olarsa, onda

$$K_0(\rho u) + \sum_{k=1}^{-\chi} \varepsilon_k x_k = f$$

tənliyinin istənilən f üçün yeganə (u, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{-\chi}$) həlli var, burada $x_k(t) = b(t)t^{k-1}$, $k = 1,...,-\chi$ $B(\omega x) = 0$ tənliyinin xətti asılı olmayan həlləridir.

İsbatı: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{-\chi}$ məchullarını

$$\sum_{k=0}^{-\chi} \varepsilon_k \int_{-1}^{1} \omega(\tau)\,\tau^{m-1} x_k(\tau)\,d\tau = \int_{-1}^{1} \omega(\tau)\,\tau^{m-1} f(\tau)\,d\tau, \quad m = 1,2,...,-\chi$$

şərtlərindən tapırıq. Bu şərtlər teorem 1.1-ə əsasən

$K_0(\rho u) = f - \sum_{k=1}^{-\chi} \varepsilon_k x_k$ tənliyinin həll olunma şərtləridir.

$$\Delta(x) = \det\left(\int_{-1}^{1} \omega(\tau)\,\tau^{m-1} x_k(\tau)\,d\tau \right) \neq 0, \qquad k,m = 1,2,...,-\chi$$

olduğundan teorem 1.1-ə əsasən $K_0(\rho u) = f - \sum_{k=1}^{-\chi} \varepsilon_k x_k$ sinqulyar inteqral tənliyinin də yeganə

$$u(t) = B(\omega t)(t) - \sum_{k=1}^{-\chi} \varepsilon_k B(\omega x_k) = B(\omega t)(t)$$

həlli var.

I növ sinqulyar inteqral tənlik üçün $(a = 0, b = 1)$ teorem 1.1 və teorem 1.2 aşağıdakı şəklə düşür.

Teorem 1.3.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}\,(\tau - t)}\,d\tau = f(t)$$

tənliyi

$$\int_{-1}^{1} \frac{u(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau = D_0$$

şərti ödəndikdə yeganə

$$u(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}\, f(\tau)}{\tau-1}d\tau + \frac{D_0}{\pi}$$

həllinə malikdir, burada D_0 – verilmiş həqiqi ədəddir.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\cdot\frac{u(\tau)}{\tau-1}d\tau = f(t) \qquad \left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\cdot\frac{u(\tau)}{\tau-t}d\tau = f(t)\right)$$

tənliyi yeganə

$$u(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\cdot\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau \qquad \left(u(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\cdot\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau\right)$$

həllinə malikdir.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}\,u(\tau)}{\tau-1}d\tau = f(t)$$

tənliyi yalnız və yalnız o halda həll olunandır ki,

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau = 0$$

şərti ödənilmiş olsun. Bu zaman yeganə həll

$$u(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}\,(\tau-t)}d\tau$$

düsturu ilə verilir.

Teorem 1.4.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}\,u(\tau)}{\tau-t}d\tau + \varepsilon = f$$

tənliyi istənilən f sağ tərəfi üçün yeganə (u,ε) həllinə malikdir, həm də

$$u(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}\,(\tau-t)}d\tau, \qquad \varepsilon = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau.$$

(1.2) tənliyinə baxaq. $\chi > 0$ olduqda

$$F(t) = B(\omega f)(t) + \sum_{s=1}^{\chi-1} c_s b(t)\, t^s$$

və $\chi \le 0$ olduqda $F(t) = B(\omega f)(t)$ işarə edək. Burada $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{\chi-1}$ əmsalları (1.5) xətti cəbri tənliklər sistemindən birqiymətli təyin olunurlar. Teorem 1.1-ə əsasən aşağıdakıları alırıq.

$\chi > 0$ halı. (1.2) tənliyi (1.4) şərtlərində

$$Mu(t) \equiv u(t) + \int_{-1}^{1} \rho(\tau) M(t,\tau) u(\tau) d\tau = F(t) \tag{1.6}$$

II növ Fredqolm inteqral tənliyi ilə eynigüclüdür. Burada

$$M(t,\tau) = a(t)\omega(t)R(t,\tau) - \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}(\xi - t)^{-1}\omega(\xi)R(\xi,\tau)d\xi.$$

$\chi = 0$ halı. (1.2) tənliyi (1.6) tənliyi ilə eynigüclüdür.

$\chi < 0$ halı. (1.2) tənliyi (1.6) tənliyinə və

$$\ell_\nu(f,R,u) \equiv \int_{-1}^{1}\omega(\tau)(f(\tau) - R(\rho u)(\tau))\tau^{\nu-1}d\tau = 0, \quad \nu = 1,2,\ldots,-\chi \tag{1.7}$$

şərtləri məcmusu ilə ekvivalentdir.

Əgər $\chi < 0$ olarsa, teorem 1.2-yə görə

$$K_\varepsilon^0(\upsilon)(t) \equiv K_0(\rho u)(t) + R(\rho u)(t) + \sum_{k=1}^{-\chi}\varepsilon_k x_k(t) = f(t), \ \upsilon = (u,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{-\chi}) \tag{1.8}$$

tənliyi (1.6) tənliyinə və

$$\sum_{k=1}^{-\chi}\varepsilon_k\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\tau^{\nu-1}x_k(\tau)\,d\tau = \ell_\nu(f,R,u), \quad \nu = 1,2,..,-\chi \tag{1.9}$$

şərtlər məcmusuna ekvivalentdir.

$a \neq 0$ və $b \neq 0$ (müəyyənlik üçün $a^2 + b^2 = 1$) sabit əmsalları üçün (1.2) tənliyinə baxaq. Tutaq ki, $\chi = 1$ olduqda $F(t) = B(\omega f)(t) + D_0/\rho_0$ (burada $\rho_0 = \int_{-1}^{1}\rho(\tau)\,d\tau$) və həm $\chi = 0$, həm də $\chi = -1$ olduqda $F(t) = B(\omega f)(t)$.

Yenidən teorem 1.1-ə əsaən alırıq:

$\chi = 1$ halı.

$$\int_{-1}^{1}\rho(\tau)u(\tau)\,d\tau = D_0 \tag{1.10}$$

olduqda (1.2) tənliyi (1.6) tənliyi ilə eynigüclüdür.

Burada D_0 – verilmiş həqiqi ədəddir.

$\chi = 0$ halı. (1.2) tənliyi (1.6) tənliyinə ekvivalentdir.

$\chi = -1$ halı. (1.2) tənliyi (1.6) tənliyinə və

$$\ell(f, R, u) \equiv \int_{-1}^{1} \omega(\tau)\left(f(\tau) - R(\rho u)(\tau)\right) d\tau = 0$$

şərtinə ekvivalentdir.

Əgər $\varkappa = -1$ olarsa, teorem 1.2-yə əsasən

$$K_\varepsilon(\upsilon)(t) \equiv K_0(\rho u)(t) + R(\rho u)(t) + \varepsilon b = f, \quad \upsilon = (u, \varepsilon) \tag{1.11}$$

tənliyi (1.6) tənliyinə və

$$\varepsilon = \left(b \int_{-1}^{1} \omega(\tau)\, d\tau\right)^{-1} \cdot \ell(f, R, u)$$

ifadəsinə görə ekvivalentdir.

2. Xarakteristik sinqulyar inteqral tənliklərlə əlaqədar olan ortoqonal çoxhədlilərin bəzi xassələri.

Tutaq ki, $\{P_n(t;\alpha,\beta)\}_0^\infty$ [-1,1] parçasında $\rho(t) = \rho(t;\alpha,\beta) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$ çəkiləri ilə ortoqonal olan Yakobi cəbri çoxhədlilər sistemidir, yəni

$$\int_{-1}^{1} \rho(\tau) P_j(\tau;\alpha,\beta) P_k(\tau;\alpha,\beta)\, d\tau = \left(P_j^{(\alpha,\beta)} \cdot P_k^{(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{1}{2}} \delta_{jk}, \quad j,k = 0,1,2....$$

burada δ_{jk} – Kroneker simvoludur,

$$P_j^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2j+\alpha+\beta+1} \cdot \frac{\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+\alpha+\beta+1)}$$

(j=0 olanda $(2j+\alpha+\beta+1)\Gamma(j+\alpha+\beta+1)$ hasilini $\Gamma(\alpha+\beta+2)$-yə dəyişmək lazımdır).

$$S^{(\alpha,\beta)}(u,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \rho(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau, \ \rho\ (t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta, \ -1 < t < 1$$

sinqulyar inteqrala baxaq. Məlumdur ki,

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(t) \equiv S^{(\alpha,\beta)}(P_n(\cdot;\alpha,\beta);t) = ctg\alpha\pi \cdot P_n(t;\alpha,\beta)\rho(t) -$$
$$-\frac{2^{\alpha+\beta}}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} F\left(n+1,-n-\alpha-\beta,1-\alpha,\frac{1-t}{2}\right) \tag{2.1}$$

burada F - hiper həndəsi funksiyadır. $\alpha+\beta$ tam olduqda

$$F\left(n+1,-n-\alpha-\beta,1-\alpha,\frac{1-t}{2}\right) = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+1)} P_{n+\alpha+\beta}(t;-\alpha,-\beta)$$

və buna görə də (2.1) - dən $\alpha+\beta$ tam olduqda alınır ki,

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(t) = ctg\alpha\pi \cdot P_n(t;\alpha,\beta)\rho(t) - \frac{2^{\alpha+\beta}}{\sin\alpha\pi} \cdot P_{n+\alpha+\beta}(t;-\alpha,-\beta) \tag{2.2}$$

və həm də

$$P_n\left(t;-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = P_n,\ T_n(t) = P_n \cos(n\arccos t),$$

$$P_n\left(t;-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = P_n \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos t\right)\cdot\left[\cos\left(\frac{1}{2}\arccos t\right)\right]^{-1},$$

$$P_n\left(t;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = P_n \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos t\right)\cdot\left[\sin\left(\frac{1}{2}\arccos t\right)\right]^{-1},$$

$$P_n\left(t;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = q_n U_n(t) = q_n \sin((n+1)\arccos t)\cdot(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$$

(burada $P_n = (2n-1)!!/(2n)!!$, $(P_0 = 1)$, $q_n = 2(2n+1)!!/(2n+2)!!$, həmçinin $T_n(t)$ və $U_n(t)$- uyğun olaraq I və II növ Çebişev çoxhədliləridir) olduğunu nəzərə alsaq, (2.2) - dən alırıq:

$$S_n^{(-1/2,-1/2)}(t) = \frac{p_n}{q_{n-1}} P_{n-1}\left(t;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),$$

$$S_n^{(-1/2,1/2)}(t) = p_n P_n\left(t;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),$$

$$S_n^{(1/2,-1/2)}(t) = p_n P_n\left(t;-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

$$S_n^{(-1/2,-1/2)}(t) = -\frac{q_n}{p_{n-1}} P_{n+1}\left(t;-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),$$

yəni,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} d\tau = U_{n-1}(t),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\cdot\frac{\cos((n+\frac{1}{2})\arccos\tau)}{\cos(\frac{1}{2}\arccos\tau)(\tau-t)}d\tau=-\frac{\sin((n+\frac{1}{2})\arccos\tau)}{\sin(\frac{1}{2}\arccos\tau)} \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\cdot\frac{\sin((n+\frac{1}{2})\arccos\tau)}{\sin(\frac{1}{2}\arccos\tau)(\tau-t)}d\tau=-\frac{\cos((n+\frac{1}{2})\arccos\tau)}{\cos(\frac{1}{2}\arccos\tau)},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}\cdot U_n(\tau)}{\tau-t}d\tau=-T_{n+1}(t)$$

Beləliklə $T_n(t)$, $\dfrac{\cos((n+\frac{1}{2})\arccos t)}{\cos(\frac{1}{2}\arccos t)}$, $\dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})\arccos t)}{\sin(\frac{1}{2}\arccos t)}$ çoxhədliləri və $U_n(t)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t)$$

inteqral tənliyi ilə əlaqəlidirlər və onun uyğun olaraq h_0 ($f(t)=U_{n-1}(t)$ olduqda),

h(1) ($f(t)=\dfrac{\cos((n+\frac{1}{2})\arccos t)}{\cos(\frac{1}{2}\arccos t)}$ olduqda) və *h(-1,1)* ($f(t)=-T_{n+1}(t)$ olduqda)

siniflərində həllidirlər.

$$aY(t)+\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Y(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t) \tag{2.4}$$

xarakteristik inteqral tənliyinə baxaq, burada $a\neq 0$ və $b\neq 0$ - həqiqi sabitlərdir (müəyyənlik üçün fərz edək ki, $a^2+b^2=1$)

Tutaq ki, *h*- h_0, *h(-1), h(1)* və *h(-1,1)* siniflərindən biridir, *z(t)* və χ uyğun olaraq *h* sinfində fundamental funksiya və (2.4) tənliyinin indeksidir.

$ctg\alpha\pi=-b/a$ və χ – tam ədəd olduğundan (2.4) - dən alınır ki,

$$a\rho(t)P_n(t;\alpha,\beta)+\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\rho(\tau)\frac{P_n(\tau;\alpha,\beta)}{\tau-t}d\tau=-\frac{2^\chi b}{\sin\alpha\pi}\cdot P_{n-\chi}(t;-\alpha,-\beta) \tag{2.5}$$

$$a\frac{P_{n-\chi}(t;-\alpha,-\beta)}{\rho(t)}-\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n-\chi}(\tau;-\alpha,-\beta)}{\rho(\tau)(\tau-t)}d\tau=-\frac{2^\chi b}{\sin\alpha\pi}\cdot P_n(t;\alpha,\beta) \tag{2.6}$$

burada $\rho(t)=z(t)=(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$.

Tutaq ki, $a(t)\neq 0$ və $b(t)\neq 0$ - həqiqidir, [-1,1]-də kəsilməzdirlər H([-1,1]) sinfinə daxil olan funksiyalardırlar, həm də ixtiyari $t\in[-1,1]$ üçün $a^2(t)+b^2(t)>0$.

x(z) və *z(t)* uyğun olaraq *h* sinfində

$$a(t)\rho(t)u(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\rho(\tau)\frac{u(\tau)}{\tau-t}d\tau=-f(t), \qquad -1<t<1 \qquad (2.7)$$

(burada $\rho(t)=z(t)/r(t)$) tənliyinin kanonik və fundamental funksiyalarıdır.

Tutaq ki, *G(z)* $C\in[-1,1]$ - də təyin olunmuş istənilən funksiyadır və fərz edək ki, sonsuz uzaqlaşmış nöqtə ətrafında

$$G(z)=\sum_{j=-\infty}^{N}G_j z^j,$$

burada *N*- tam ədəddir.

$$P\cdot P\cdot(G;z)\equiv\begin{cases}\sum_{j=0}^{N}G_j z^j, \; N\geq 0 \; olduqda\\ 0 \quad , N<0 \; olduqda\end{cases}$$

ifadəsi *G(z)* funksiyasının baş qiyməti adlanır.

İsbat olunmuşdur ki, istənilən *P* çoxhədlisi üçün

$$a(t)\rho(t)P(t)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\rho(\tau)\frac{b(\tau)P(\tau)}{\tau-t}d\tau=P\cdot P\cdot(PX;t), \quad t\in(-1,1) \quad (2.8)$$

$$a(t)\omega(t)P(t)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\frac{b(\tau)P(\tau)}{\tau-t}d\tau=-P\cdot P\cdot(PX^{-1};t), \quad t\in(-1,1) \quad (2.9)$$

burada $\omega(t)=1/z(t)r(t)$.

Tutaq ki, $\{P_j(t;\rho)\}_0^\infty$ - $\rho(t)=z(t)/r(t)$ çəkiləri ilə və ciddi müsbət əmsallı [-1,1]-də ortoqonal olan cəbri çoxhədlilər sistemidir.

$n\geq\max(0,-\chi)$ olduqda

$$q_n(z)=P\cdot P\cdot\{(-1)^\chi X(\cdot)P(\cdot;\rho);z\}, \quad z\in C$$

düsturu ilə təyin olunan $q_n(z)$ çoxhədlisinin sonsuzluqda tərtibi *n* və z^n-in əmsalı ciddi müsbətdir.

Aşağıdakı teoremlər doğrudur.

Teorem 2.1. Tutaq ki, *b(t)* - $l\geq 0$ tərtibli çoxhədlidir. Onda istənilən $n\geq\max(0,l-\chi)$ və $t\in(-1,1)$ üçün

$$a(t)\rho(t)P_{n+\chi}(t;\rho)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\rho(\tau)\frac{P_{n+\chi}(\tau;\rho)}{\tau-t}d\tau=(-1)^{\chi}q_n(t) \qquad (2.10)$$

və $\{q_j(t)\}$, $j\geq\max(0,l-\chi)$ çoxhədlilər sistemi [-1,1]-də $\omega(t)=1/z(t)r(t)$ çəkiləri ilə ortoqanaldır.

Bundan sonra $q_j(t)$-ni $q_j(t;\omega)$ ilə işarə edəcəyik.

Teorem 2.2. Tutaq ki, *b(t)* - $l\geq 0$ tərtibli çoxhədlidir. Onda istənilən $n\geq\max(\chi,l)$ və $t\in(-1,1)$ üçün

$$a(t)\,\omega(t)q_{n-\chi}(t;\omega)-\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\frac{q_{n-\chi}(\tau;\omega)}{\tau-t}d\tau=(-1)^{\chi}P_n(t;\rho) \qquad (2.11)$$

Teorem 2.3. Tutaq ki, *b(t)* - $l\geq 0$ tərtibli çoxhədlidir. Onda istənilən $n\geq\max(\chi,l)$ və bütün $z\in C$ üçün

$$P_{n+1}(z;\rho)\,q_{n-\chi}(z;\omega)-P_n(z;\rho)\,q_{n-\chi+1}(z;\omega)=(-1)^{\chi+1}c_n b(z) \qquad (2.12)$$

burada c_n- z-dən asılı olmayan sabitdir.

Məlumdur ki, $P_n(t;\rho)$ və $q_{n-\chi}(t;\omega)$ çoxhədlilərinin sıfırları həqiqidir, müxtəlifdir və (-1,1) intervalında yerləşir.

Tutaq ki, $\tau_{j,n}$, $j=1,2,..,n$ - $P_n(t;\rho)$ çoxhədlisinin, $t_{j,n-\chi}$, $j=1,2,..,n-\chi$ isə $q_{n-\chi}(t;\omega)$ çoxhədlisinin sıfırlarıdır. (2.12)-dən belə nəticə çıxır ki, əgər $P_n(t;\rho)$ və $q_{n-\chi}(t;\omega)$ çoxhədlilərinin sıfırları arasında üst-üstə düşənləri varsa, onda onlar *b(t)* çoxhədlisinin də sıfırları olurlar.

3. Sinqulyar inteqral tənliklərin parçada konstruktiv həll metodları.

3.1. Kvadratur metodunun sxeminin qurulması.

Tutaq ki, *h*- h_0 , *h(-1), h(1)* və *h(-1,1)* siniflərindən biridir, *z(t)* və χ isə uyğun olaraq *h* sinfində fundamental funksiya və K^0 operatorunun indeksidir. Tutaq ki, $\rho(t)=z(t)/r(t)$ və $\{P_j(t;\rho)\}_0^\infty$ - [-1,1] parçasında ortoqonal olan cəbri çoxhədlilər sistemidir. $P_n(t;\rho)$ çoxhədlisinin sıfırlarını $\tau_{j,n}$, $j=1,2,..,n$ ilə işarə edək. Tutaq ki,

$$\ell_{j,n}=\frac{P_n(t;\rho)}{(t-\tau_{j,n})P_n'(\tau_{j,n};\rho)}\ ,\quad j=1,2,..,n$$

və

$$\lambda_{j,n}(\rho)=\int_{-1}^{1}\rho(\tau)\,\ell_{j,n}(\tau;\rho)d\tau,\quad j=1,2,..,n$$

Kristofel ədədləridir,

$$\int_{-1}^{1}\rho(\tau)\,u(\tau)d\tau=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\,u(\tau_{j,n})+R_n^G(u,\rho),\ j=1,2,..,n \qquad (3.1)$$

cəbri dəqiqlik dərəcəsi *2n-1*-ə bərabərdir. $\rho(t)=\rho(t;\alpha,\beta)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$, $\alpha,\beta>1$ halında $\ell_{j,n}(t;\rho)$ və $\lambda_{j,n}(\rho)$ -nu uyğun olaraq $\ell_{j,n}(t;\alpha,\beta)$ və $\lambda_{j,n}(\alpha,\beta)$ ilə işarə edəcəyik.

Təqribi həlli $h_{n-1}(z_n,t;\rho)=\sum_{j=1}^{n}z_{j,n}\ell_{j,n}(t;\rho),\ z_n=(z_{1,n},z_{2,n},..,z_{n,n})^T$

Laqranj interpolyasiya çoxhədlisi şəklində axtaracağıq. $z_n=(z_{1,n},z_{2,n},..,z_{n,n})^T$ - vector-sütununun kordinatları

$$(A_n+R_n)\,z_n=f_m \qquad (3.2)$$

xətti cəbri tənliklər sistemindən təyin olunur, burada, $f_m=(f(t_{1,m}),..,f(t_{m,m})),\ m=n-\chi$,

$t_{i,m}, i=1,..,m-$ isə $q_m(t)=q_m(t;\omega)$ çoxhədlisinin sıfırları; $A_n=(a_{ij})$, $R_n=(R_{ij})$- *mxn* ölçülü matrislərdir və *i=1,..,m*, *j=1,..,n.*

$$a_{i,j}=\begin{cases}-\dfrac{b(t_{i,m})\lambda_{j,n}(\rho)}{\pi(t_{i,m}-\tau_{j,n})}, & \tau_{j,n}\neq t_{i,m},\\[2ex] (-1)^{\chi}\dfrac{q_m'(\tau_{j,n};\omega)}{P_m(\tau_{j,n};\rho)}-\dfrac{1}{\pi}\lambda_{j,n}(\rho)b(\tau_{j,n}'), & \tau_{j,n}=t_{i,m},\end{cases}$$

$$R_{i,j} = \lambda_{j,n}(\rho)\, R\left(t_{i,m}, \tau_{j,n}\right).$$

(3.2) sistemi aşağıdakı kimi qurulur. Nəzərə alsaq ki,

$$K_0 = \left(\rho(\cdot)\, P_n(\cdot;\rho)\right)(t) = (-1)^{\chi} q_m(t;\omega)$$

və

$$q_m\left(\tau_{j,n};\omega\right) = (-1)^{\chi} \pi^{-1} b\left(\tau_{j,n}\right) \lambda_{j,n}(\rho) P_n'\left(\tau_{j,n};\rho\right),$$

alarıq ki,

$$K_0 = \left(\rho(\cdot)\; L_{n-1}(u,\cdot;\rho)\right)(t) = \tag{3.3}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{\chi}\left(q_m(t;\omega) - q_m\left(\tau_{j,n};\omega\right) - \pi^{-1}\left(b(t) - b\left(\tau_{j,n}\right)\right)\lambda_{j,n}(\rho) P_n'\left(\tau_{j,n};\rho\right)\right)}{\left(t - \tau_{j,n}\right) P_n'\left(\tau_{j,n};\rho\right)} u\left(\tau_{j,n}\right)$$

$$\begin{aligned} K_0(\rho u)(t) &= a(t)\rho(t)\left(u(t) L_{n-1}(u,t;\rho)\right) + \\ &\quad + K_0\left(\rho(\cdot)\; L_{n-1}(u,\cdot;\rho)\right)(t) + b(t) R_n(u,t;\rho), \end{aligned}$$ burada

$$R_n(u,t;\rho) = \pi^{-1} \int_{-1}^{1} \rho(\tau)(\tau - t)^{-1}\left(u(\tau) - L_{n-1}(u,\tau;\rho)\right) d\tau.$$

Onda (3.3) münasibətinə əsasən

$$K_0(\rho u)\left(t_{i,m}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} u\left(\tau_{j,n}\right) + a\left(t_{i,m}\right)\rho\left(t_{i,m}\right)\left(u\left(t_{i,m}\right) - L_{n-1}\left(u, t_{i,m};\rho\right)\right) + b\left(t_{i,m}\right) R_n\left(u, t_{i,m};\rho\right), \quad i = 1,2$$

$$\int_{-1}^{1} \rho(\tau) R\left(t_{i,m};\tau\right) u(\tau)\, d\tau = \sum_{j=1}^{n} R_{i,j} u\left(\tau_{j,n}\right) + R_n\left(R\left(t_{i,m},\cdot\right) u(\cdot);\rho\right).$$

Beləliklə $t=t_{i,m}$, $i=1,..,m$ götürməklə

$$\begin{aligned} \left(a_{i,j} + R_{i,j}\right) u\left(\tau_{j,n}\right) &= f\left(t_{i,m}\right) - a\left(t_{i,m}\right)\rho\left(t_{i,m}\right)\left(u\left(t_{i,m}\right) - L_{n-1}\left(u, t_{i,m};\rho\right)\right) - \\ &- b\left(t_{i,m}\right) R_n\left(u, t_{i,m};\rho\right) - R_n^G\left(R\left(t_{i,m},\cdot\right) u(\cdot);\rho\right). \end{aligned}$$

$t=t_{i,m}$ olduqda $a(t_{i,m})\rho(t_{i,m})(u(t_{i,m})-L_{n-1}(u,t_{i,m};\rho))$, $b(t_{i,m})R_n(u,t_{i,m};\rho)$ və

$R_n^G(R(t_{i,m};u(\cdot);\rho))$ qiymətlərini nəzərə almamaqla axtarılan $u(t)$ funksiyasının $u(\tau_{j,n})=z_n$

$j=1,..,n$ təqribi qiymətlərinə nəzərən (3.2) xətti sisteminə gəlirik.

$A_n z_n=g_m$, $g_m=(g_{1,m},..,g_{m,m})^T$ xətti cəbri tənliklər sisteminin tərs matrisinin tapılamsını araşdıraq. Uyğun matris xarakteristik matris adlanır.

Tutaq ki, $L_{n-1}(z_n,\tau_{j,n};\rho)=z_{jn}$, $j=1,..,n$, $m=n-\chi$

$$\hat{a}_{j,i}=\begin{cases}\dfrac{b(\tau_{j,n})\lambda_{i,m}(\omega)}{\pi(\tau_{j,n}-t_{i,m})}, & \tau_{j,n}\neq t_{i,m},\\[2ex] (-1)^{\chi}\dfrac{P_n'(t_{i,m};\rho)}{q_m(t_{i,m};\omega)}+\dfrac{1}{\pi}b'(t_{i,m})\lambda_{i,m}(\omega), & \tau_{j,n}=t_{i,m},\end{cases}$$

və

$$\lambda_{i,m}(\omega)=\int_{-1}^{1}w(\tau)\,\ell_{i,m}(\tau,\omega)d\tau\;\ell(\tau,\omega)=\frac{q_m(t,\omega)}{(t-t_{i,m})\,q_m'(t_{i,m};\omega)},\;\; i=1,..,m.$$

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 3.1. Aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sistemi verilmişdir.

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}z_{jn}=g_{i,n}\,,\;\; i=1,..,m\\ &\sum_{j=1}^{n}d(\chi)\lambda_{j,n}(\rho)\,\tau_{j,n}^{\nu}z_{jn}=d(\chi)D_{\nu}\,,\;\; \nu=0,1,..,\chi-1\end{aligned}\tag{3.4}$$

burada $d(\chi)=1$, $\chi>0$ olduqda və $d(\chi)=0$, $\chi\leq 0$, $D_0,..,D_{\chi-1}$ – verilmiştam ədədlərdir. Verilmiş xətti tənliklər sisteminin

a) $\chi\geq 0$ olduqda yeganə həlli var.

$$z_{jn}=\sum_{j=1}^{m}\hat{a}_{ji}g_{i,m}+d(\chi)\,b(\tau_{j,n})\sum_{s=0}^{\chi-1}c_s\,\tau_{j,n}^{s}\,,\;\; j=1,..,n\tag{3.5}$$

burada $c_0,..,c_{\chi-1}$ əmsalları

$$\sum_{s=0}^{\chi-1}c_s\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\,\tau_{j,n}^{s+\nu}b(\tau_{j,n})\right)=D_{\nu}\,,\;\; \nu=0,1,..,\chi-1\tag{3.6}$$

b) $\chi<0$ olan halda yalnız və yalnız o zaman həll var ki,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,m}(\omega)\, t_{i,m}^{\nu-1} g_{i,m} = 0, \; \nu = 0,1,..,-\chi \tag{3.7}$$

şərti ödənilsin. Bu zaman həll (3.5) düsturu ilə verilir.

İsbatı. Tutaq ki, $\chi\geq 0$

$$K_0(\rho(\cdot)\; L_{n-1}(z_n,\cdot;\rho))(t_{i,m}) = g_{i,m}\,,\; i=1,..,m, \tag{3.8}$$

$$\int_{-1}^{1} \rho(\tau)\,\tau^{\nu} L_{n-1}(z_n,\tau;\rho)\,d\tau = D_{\nu}\,, \quad \nu = 0,1,..,\chi-1 \tag{3.9}$$

$n\geq \ell+\chi$ olduqda $K_0 = (\rho(\cdot)\; L_{n-1}(z_n,\cdot;\rho))(t)$ ifadəsi $m=n-\chi$ dərəcəli cəbri çoxhədlidirvə (3.8)-ə uyğun olaraq $t_{i,m}$ nöqtələrində $g_{i,m}$ qiymətlərini alır. Deməli, o $L_{m-1}(g_m,t;\omega)$ ($L_{m-1}(g_m,t_{i,m};\omega) = g_{i,m}$, $i=1,..,m$) interpolyasiya polinomu ilə üst-üstə düşür. Buradan alınır ki, (3.8) xətti cəbri tənliklər sistemi $L_{n-1}(z_n,t;\rho)$-yə nəzərən

$$K_0(\rho(\cdot)\; L_{n-1}(z_n,\cdot;\rho))(t_{i,m}) = L_{n-1}(g_m,t;\omega) \tag{3.10}$$

sinqulyar inteqral tənliyi ilə eynigüclüdür. Məlum teoremə görə (3.10) tənliyinin (3.9) şərtləri daxilində

$$L_{n-1}(z_n,t;\rho) = B(\omega(\cdot)\; L_{m-1}(g_m,\cdot;\omega))(t) + d(\chi)b(t)\sum_{s=0}^{\chi-1} c_s t^s \tag{3.11}$$

kimi yeganə həlli var, burada $c_0,..,c_{\chi-1}$ əmsalları

$$\sum_{s=0}^{\chi-1} c_s \int_{-1}^{1} \rho(\tau)\,\tau^{s+\nu} b(\tau)\,d\tau = D_{\nu}\,,\; \nu = 0,1,..,\chi-1$$

xətti cəbri tənliklər sistemindən təyin edilir və (3.6) ilə üst-üstə düşür.

(3.11)-i nəzərə almaqla

$$B(\omega(\cdot)\; q_m(\,\cdot;\omega))(t) = (-1)^{\chi} P_n(t;\rho),$$

$$P_n(t_{i,m};\rho) = -\frac{(-1)^{\chi}}{\pi} b(t_{i,m})\lambda_{i,m}(\omega) q_m^{'}(t_{i,m};\omega)$$

alarıq. Başqa sözlə,

$$B(\omega(\cdot)\; L_{m-1}(g_m,\cdot;\omega))(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{\chi}\left(P_n(t;\rho) - P_n(t_{i,m};\rho)\right) + \pi^{-1}\left(b(t) - b(t_{i,m})\right)\lambda_{i,m}(\omega) q_m^{'}(t_{i,m};\omega)}{(t-t_{i,m})\, q_m^{'}(t_{i,m};\omega)} \cdot g_{i,m}$$

Ona görə də (3.11)-dən taparıq ki,

$$z_{jn}=\sum_{j=1}^{m}\hat{a}_{ji}g_{i,m}+d(\chi)\,b(\tau_{j,n})\sum_{s=0}^{\chi-1}c_s\,\tau_{j,n}^{s},\quad j=1,..,n.$$

Bununla da $\chi\geq 0$ halı üçün teorem isbat olunur.

Tutaq ki, $\chi<0$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}z_{jn}=g_{i,n},\ \ i=1,..,m$$

xətti tənliklər sistemi və (3.7) şərtlərini uyğun olaraq

$$K_0(\rho(\cdot)\ L_{n-1}(z_n,\cdot;\rho))(t_{i,m})=g_{i,m}\,,\ i=1,..,m, \tag{3.12}$$

$$\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\ L_{n-1}(g_m,\tau;\omega)\tau^{\nu-1}d\tau=0,\qquad \nu=0,1,..,-\chi \tag{3.13}$$

$\chi\geq 0$ halında olduğu kimi, (3.12) xətti tənliklər sistemi

$$K_0(\rho(\cdot)\ L_{n-1}(z_n,\cdot;\rho))(t_{i,m})=L_{n-1}(g_m,t;\omega)$$

sinqulyar inteqral tənliyi ilə eynigüclüdür ($L_{n-1}(z_n,t;\rho)$-ə nəzərən). Məlum teoremə əsasən bu tənliyin yeganə həlli var və bu həll aşağıdakıdır

$$L_{n-1}(z_n,t;\rho)=B(\omega(\cdot)\ L_{m-1}(g_m,\cdot;\omega))(t).$$

Buradan da teoremin b) bəndi isbat olunur.

Teorem 3.2. $\chi<0$ olarsa onda,

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}z_{jn}+\sum_{k=1}^{-\chi}\varepsilon_{kn}x_k(t_{i,m})=g_{i,m}\,,\ \ j=1,..,m \tag{3.14}$$

burada

$$x_k(t)=b(t)\,t^{k-1},\ k=1,..,-\chi$$

yeganə $(z_{1n},..,z_{nn},\varepsilon_{1n},..,\varepsilon_{-\chi n})$ həllinə malikdir və

$$z_{jn}=\sum_{i=1}^{m}\hat{a}_{ji}g_{i,m}\,,\ \ j=1,..,n \tag{3.15}$$

$$\varepsilon_{kn}=\frac{1}{\Delta(\chi)}\sum_{s=1}^{-\chi}\Delta_{sk}(\chi)\sum_{i=1}^{m}\lambda_{i,m}(\omega)\ t_{i,m}^{s-1}g_{i,m}\,,\ k=1,..,-\chi \tag{3.16}$$

burada, $\Delta_{sk}(\chi)$ - aşağıdakı determinantın cəbri tamamlayıcısıdır:

$$\Delta(\chi)=\det\left(\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\,x_k(\tau)\,\tau^{\nu-1}d\tau\right),\qquad k,\nu=1,..,-\chi$$

İsbatı. (3.14) xətti cəbri tənliklər sistemini

$$K_0(\rho(\cdot)\ L_{n-1}(z_n,\cdot;\rho))(t_{i,m})+\sum_{k=1}^{-\chi}\varepsilon_{kn}x_k(t_{i,m})=g_{i,m}\,,\ i=1,..,m \quad (3.17)$$

şəklində yazmaq olar. $n\geq\ell$ olduqda

$$K_0(\rho(\cdot)\ L_{n-1}(z_n,\cdot;\rho))(t)+\sum_{k=1}^{-\chi}\varepsilon_{kn}x_k(t)$$

ifadəsi $m=n-\chi$ dərəcəli cəbri çoxhədlidir və (3.17)-yə əsasən $t_{i,m}$ nöqtələrində $g_{i,m}$ qiymətlərini alır. Deməli, o həm də $L_{m-1}(g_m,t;\omega)$ interpolyasiya çoxhədlisi ilə üst-üstə düşür. Buradan alınır ki, (3.17)

$$K_0(\rho(\cdot)\ L_{n-1}(z_n,\cdot;\rho))(t)+\sum_{k=1}^{-\chi}\varepsilon_{kn}x_k(t)=L_{m-1}(g_m,t;\omega)$$

ilə $(L_{n-1}(z_n,t;\rho),\varepsilon_{1n},..,\varepsilon_{-\chi n})$ - ə nəzərən eynigüclüdür. $\varepsilon_{1n},..,\varepsilon_{-\chi n}$ məchulları

$$K_0(\rho(\cdot)\ L_{n-1}(z_n,\cdot;\rho))(t)=L_{m-1}(g_m,t;\omega)-\sum_{k=1}^{-\chi}\varepsilon_{kn}x_k(t) \quad (3.18)$$

inteqral tənliyinin həll olunma şərtlərindən tapılır, hansı ki, məlum teoremə görə

$$\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\left(L_{m-1}(g_m,t;\omega)-\sum_{k=1}^{-\chi}\varepsilon_{kn}x_k(\tau)\right)\tau^{\nu-1}d\tau=0\,,\ \ \nu=1,...,-\chi$$

$$\sum_{k=1}^{-\chi}\varepsilon_{kn}\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\,x_k(\tau)\,\tau^{\nu-1}d\tau=\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\,L_{m-1}(g_m,t;\omega)\,\tau^{\nu-1}d\tau\,,\ \ \nu=1,...,-\chi \quad (3.19)$$

$$\sum_{k=1}^{-\chi}\varepsilon_{kn}\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\,x_k(\tau)\,\tau^{\nu-1}d\tau=\sum_{i=1}^{m}\lambda_{i,m}(\omega)g_{i,m}\,t_{i,m}^{\nu-1}\,,\ \ \nu=1,...,-\chi$$

Bu sistemin determinantı

$$\Delta(\chi)=\det\left(\int_{-1}^{1}\omega(\tau)x_k(\tau)\,\tau^{m-1}d\tau\right), \qquad k,m=1,..,-\chi$$

sıfırdan fərqli olduğu üçün (3.16) alınır.

Məlum teoremə görə (3.18)-dən tapırıq ki,

$$L_{n-1}(z_n,t;\rho)=B(\omega(\cdot)\ L_{m-1}(g_m,\cdot;\omega))(t).$$

Buradan da (3.15) alınır.

3.2. Sxemlərin əsaslandırılması.

(1.2) tənliyinin həllini $L_{2,\rho}$ – də axtaracağıq. Bu (1.1) tənliyinin $L_{2,\omega}$ sinfində həllinin axtarılması ilə eynigüclüdür. (1.6) tənliyini operator şəklində yazaq.

$$Mu \equiv u + Tu \tag{3.20}$$

Bu $X=L_{2,\rho}$ fəzasında, burada

$$T(u)(t) = T(Mu)(t) = \int_{-1}^{1} \rho(\tau) M(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

X-də tamamilə kəsilməz operatordur.

$\chi>0$ halı. Tutaq ki, (1.2) tənliyinin (1.4) əlavə şərtlər daxilində X-də yeganə həlli var. Bu bircins $Mu=0$ tənliyinin X-də yalnız sıfır həllinin olması ilə eynigüclüdür.

$\chi>0$ olduqda (3.2) sistemi axıra qədər təyin olunmamışdır. Ona görə də diskretləşdirilmiş əlavə (1.4) şərtlərini əlavə etməklə aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sistemini alarıq.

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(a_{ij} + R_{ij}\right) z_{jn} = f_{i,m}, & i=1,..,m, m=n-\chi \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{j,n}(\rho)\tau_{j,n}^{\nu} z_{jn} = D_{\nu}, & \nu = 0,1,..,\chi-1 \end{cases} \tag{3.21}$$

burada $f_{i,m}=f(t_{i,m})$ işarələnmişdir. Bu sistem teorem 3.1-ə əsasən aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sistemi ilə eynigüclüdür.

$$z_{jn} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \hat{a}_{ji} R_{i,k}\right) z_{kn} = F_{j,m}, \; j=1,..,n \tag{3.22}$$

burada

$$F_{j,m} = \sum_{i=1}^{m} \hat{a}_{ji\nu} f_{i,m} + b(\tau_{j,n}) \sum_{s=1}^{\chi-1} c_s \tau_{j,m}^{s},$$

$c_0, \ldots, c_{\chi-1}$ əmsalları isə (3.6) xətti cəbri tənliklər sistemindən birqiymətli təyin olunurlar.

$$L_{m-1}(R,t;\rho) = L_{m-1}(R(t,\tau),t;\omega) L_{n-1}(R,\tau;\rho) = L_{n-1}(R(t,\tau),\tau;\rho)$$

işarə edək.

$$X_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j P_j(t,\rho) \right\}$$

işarə edək, burada $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ – istənilən həqiqi ədədlərdir.

Nəzərə alsaq ki,

$$M_{m-1}(t,\tau) \equiv a(t)\omega(t)L_{m-1}(R(t,\tau),t;\omega) - \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{L_{m-1}(R(\xi,\tau),\xi;\omega)}{\xi - t}d\xi =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{\chi}\left[P_n(t;\rho) - P_n(t_{i,m};\rho)\right] + \dfrac{b(t)-b(t_{i,m})}{\pi}\lambda_{i,m}(\omega)q'_m(t_{i,m};\omega)R(t_{i,m};\tau)}{(t-t_{i,m})\,q'_m(t_{i,m};\omega)}$$

$t(n > l+\chi)$–yə nəzərən $(n-1)$ dərəcəli çoxhədlilərdir. Onda (3.22) sistemini X_n fəzasında aşağıdakı xətti operator tənliyi şəklində yazmaq olar.

$$M_{n-1}U_{n-1} \equiv U_{n-1} + T_{n-1}U_{n-1} = F_{n-1}$$

burada,

$$U_{n-1} \in x_n, \qquad z_{n-1}(t) = T_{n-1}(U_{n-1})(t) =$$

$$= \int_{-1}^{1}\rho(\tau)\,L_{n-1}(M_{m-1}(t,\tau)\,U_{n-1}(\tau),\tau;\rho)\,d\tau,$$

$$F_{n-1}(t) = L_{n-1}(B(\omega(\cdot)L_{m-1}(f,\cdot,\omega),t;\rho)) + b(t)\sum_{s=0}^{\chi-1}c_s t^s.$$

$E^{(1)}_{m-1}(R)_\infty$ $(E^{(2)}_{n-1}(R)_\infty)$ ilə *R(τ,t)* funksiyasının *t*-yə (*τ*-ya) nəzərən *m-1* *(n-1)* dərəcədən böyük olmayan cəbri çoxhədlilərlə müntəzəm yaxınlaşmalarını işarə edək.

$x \in c[-1,1]$ üçün

$$\|x\|_\infty = \max\{\,|\,x(t)\,|\,; t \in [-1,1]\},\ r_0 = \min\{r(t),\ t \in [-1,1]\},$$

$$\rho_0 = \int_{-1}^{1}\rho(\tau)\,d\tau,\ \omega_0 = \int_{-1}^{1}\omega(\tau)\,d\tau.$$

X fəzasında $MU_{n-1} - M_{n-1}U_{n-1}$, $U_{n-1} \in X_n$ fərqini qiymətləndirək.

$$MU_{n-1} - M_{n-1}U_{n-1} = \int_{-1}^{1}\rho(\tau)\left[M(t,\tau) - L_{n-1}(M(t,\tau),\tau;\rho)\right]U_{n-1}(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int_{-1}^{1}\rho(\tau)L_{n-1}([M(t,\tau) - M_{m-1}(t,\tau)]\,U_{n-1}(\tau),\tau;\rho)\,d\tau \stackrel{def}{=} B_1(t) + B_2(t),$$

burada nəzərə alınmışdır ki,

$$\int_{-1}^{1}\rho(\tau)L_{n-1}(M(t,\tau)U_{n-1}(\tau),\tau;\rho)d\tau = \int_{-1}^{1}\rho(\tau)L_{n-1}(M(t,\tau),\tau;\rho)U_{n-1}(\tau)\,d\tau.$$

X fəzasında $B_1(t)$ və $B_2(t)$ -ni qiymətləndirək.

$$B_1(t)=\int_{-1}^{1}\rho(\tau)[a(t)\,\omega(t)\,(R(t,\tau)-L_{n-1}(R(t,\tau),t;\rho))-$$

$$-\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{R(\xi,\tau)-L_{n-1}(R(\xi,\tau),\xi;\rho)}{\xi-t}d\xi\Bigg]U_{n-1}(\tau)d\tau.$$

Hölder bərabərsizliyini tətbiq etməklə, alarıq ki,

$$|B_1(t)|\le\|U_{n-1}\|_{2,\rho}\Bigg(\int_{-1}^{1}\rho(\tau)[a(t)\omega(t)(R(t,\tau)-L_{n-1}(R(t,\tau),t;\rho))-$$

$$-\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{R(\xi,\tau)-L_{n-1}(R(\xi,\tau),\xi;\rho)}{\xi-t}d\xi\Bigg]^2 d\tau\Bigg)^{1/2}\le$$

$$\le\|U_{n-1}\|_{2,\rho}\Bigg[2a^2(t)\omega^2(t)\int_{-1}^{1}\rho(\tau)(R(t,\tau)-L_{n-1}(R(t,\tau),t;\rho))^2d\tau+$$

$$+2b^2(t)\int_{-1}^{1}\rho(\tau)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{R(\xi,\tau)-L_{n-1}(R(\xi,\tau),\xi;\rho)}{\xi-t}d\xi\right)^2d\tau\Bigg]^{1/2}\le$$

$$\le\|U_{n-1}\|_{2,\rho}[8a^2(t)\,\omega^2(t)\left(E_{n-1}^{(2)}(R)_\infty\right)^2\rho_0+$$

$$+2b^2(t)\int_{-1}^{1}\rho(\tau)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{R(\xi,\tau)-L_{n-1}(R(\xi,\tau),\xi;\rho)}{\xi-t}d\xi\right)^2d\tau\Bigg]^{1/2}$$

buradan,

$$\int_{-1}^{1}\rho(t)|B_1(t)|^2dt\le\|U_{n-1}\|_{2,\rho}^2\Bigg[8\rho_0\left(E_{n-1}^{(2)}(R)_\infty\right)^2\int_{-1}^{1}\rho(t)a^2(t)\omega^2(t)dt+$$

$$+2\int_{-1}^{1}\rho(\tau)\,b^2(t)\left(\int_{-1}^{1}\rho(\tau)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{R(\xi,\tau)-L_{n-1}(R(\xi,\tau),\xi;\rho)}{\xi-t}d\xi\right)^2d\tau\right)dt\Bigg]\le$$

$$\le\|U_{n-1}\|_{2,\rho}^2[8r_0^{-2}\rho_0\omega_0\|a\|_\infty^2\left(E_{n-1}^{(2)}(R)_\infty\right)^2+$$

$$+2r_0^{-2}\|b\|_\infty^2\int_{-1}^{1}\rho(\tau)\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{\omega(t)}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{R(\xi,\tau)-L_{n-1}(R(\xi,\tau),\xi;\rho)}{\xi-t}d\xi\right)^2dt\right)d\tau\Bigg].\ \omega\in(A_2)$$

olduğundan teorem 1.1-ə əsasən

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\omega(t)}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{R(\xi,\tau)-L_{n-1}(R(\xi,\tau),\xi;\rho)}{\xi-t}d\xi\right)^2dt\le$$

$$\le B_0^2(\omega)\int_{-1}^{1}\omega(t)[R(t,\tau)-L_{n-1}(R(t,\tau),\tau;\rho)]^2dt\le 4\omega_0B_0^2(\omega)\left(E_{n-1}^{(2)}(R)_\infty\right)^2.$$ Deməli,

$$\int_{-1}^{1}\rho(t)|B_1(t)|^2dt\le 8r_0^{-2}\rho_0\omega_0\left(\|a\|_\infty^2+\|b\|_\infty^2\cdot B_0^2(\omega)\right)\left(E_{n-1}^{(2)}(R)_\infty\right)^2\|U_{n-1}\|_{2,\rho}^2$$

Beləliklə,

$$\|B_1(\cdot)\|_{2,\rho} \le A_1(\rho,\omega,a,b)E_{n-1}^{(2)}(R)_\infty \cdot \|U_{n-1}\|_{2,\rho}^2,$$

burada

$$A_1(\rho,\omega,a,b) = 2r_0^{-1}(2\rho_0\omega_0)^{1/2}\left(\|a\|_\infty^2 + B_0^2(\omega)\|b\|_\infty^2\right)^{1/2}$$

Həm də,

$$B_0(t) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\left[\, M(t,\tau_{j,n}) - M_{m-1}(t,\tau_{j,n})\,\right]U_{n-1}(\tau_{j,n}) =$$

$$= a(t)\omega(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\left[\, R(t,\tau_{j,n}) - L_{m-1}(R(t,\tau_{j,n}),t;\omega)\,\right]U_{n-1}(\tau_{j,n}) -$$

$$- b(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)U_{n-1}(\tau_{j,n})\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{R(\xi,\tau_{j,n}) - L_{m-1}(R(\xi,\tau_{j,n}),\xi;\omega)}{\xi - t}d\xi =$$

$$= a(t)B_{21}(t) - b(t)B_{22}(t).$$

X fəzasında $B_{21}(t)$ və $B_{22}(t)$ -ni qiymətləndirək.

$$\|B_{21}(\cdot)\|_{2,\rho}^2 = \int_{-1}^{1}\rho(t)\omega^2(t)\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\left[\, R(t,\tau_{j,n}) - L_{m-1}(R(t,\tau_{j,n}),t;\omega)\,\right]U_{n-1}(\tau_{j,n})\right]^2 dt \le$$

$$\le \int_{-1}^{1}\rho(t)\omega^2(t)\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\; U_{n-1}^2(\tau_{j,n})\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\left[\, R(t,\tau_{j,n}) - L_{m-1}(R(t,\tau_{j,n}),t;\omega)\,\right]^2\right)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\; U_{n-1}^2(\tau_{j,n})\int_{-1}^{1}\rho(t)\omega^2(t)\left[\, R(t,\tau_{j,n}) - L_{m-1}(R(t,\tau_{j,n}),t;\omega)\,\right]^2 dt \le$$

$$\le r_0^{-2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\; U_{n-1}^2(\tau_{j,n})\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\int_{-1}^{1}\omega(t)\left[\, R(t,\tau_{j,n}) - L_{m-1}(R(t,\tau_{j,n}),t;\omega)\,\right]^2 dt.$$ Buradan

tapırıq ki,

$$\|B_{21}(\cdot)\|_{2,\rho}^2 \le 4\omega_0 r_0^{-2}\left(E_{m-1}^{(1)}(R)_\infty\right)^2\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\; U_{n-1}^2(\tau_{j,n})\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho) =$$

$$= 4r_0^{-2}\rho_0\omega_0\left(E_{m-1}^{(1)}(R)_\infty\right)^2\|U_{n-1}\|_{2,\rho}^2.$$

Beləliklə, $\|B_{21}(\cdot)\|_{2,\rho} \le 2r_0^{-2}(\rho_0\omega_0)^{1/2}E_{m-1}^{(1)}(R)_\infty\|U_{n-1}\|_{2,\rho}$

$B_{22}(t)$ -ni qiymətləndirək.

$$\int_{-1}^{1}\rho(t)|B_{22}(t)|^2 dt = \int_{-1}^{1}\rho(t)\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)U_{n-1}(\tau_{j,n})\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{R(\xi,\tau_{j,n}) - L_{m-1}(R(\xi,\tau_{j,n}),\xi;\omega)}{\xi - t}d\xi\right]^2 dt \le$$

$$\le \int_{-1}^{1}\rho(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)U_{n-1}^2(\tau_{j,n})\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{R(\xi,\tau_{j,n}) - L_{m-1}(R(\xi,\tau_{j,n}),\xi;\omega)}{\xi - t}d\xi\right)^2 dt \le$$

$$\le r_0^{-2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)U_{n-1}^2(\tau_{j,n})\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\int_{-1}^{1}\frac{1}{\omega(\xi)}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{R(\xi,\tau_{j,n})-L_{m-1}(R(\xi,\tau_{j,n}),\xi;\omega)}{\xi-t}d\xi\right)dt.$$

Buradan teorem 1.1-ə əsasən

$$\int_{-1}^{1}\rho(t)\left|B_{22}(t)\right|^2dt\le 4r_0^{-2}\rho_0\omega_0B_0^2(\omega)\left(E_{m-1}^{(1)}(R)_\infty\right)^2U_{2,\rho}^2,$$

deməli,

$$\|B_{22}(\cdot)\|_{2,\rho}\le 2r_0^{-1}(\rho_0\omega_0)^{1/2}B_0^2(\omega)\|U_{n-1}\|_{2,\rho}E_{m-1}^{(1)}(R)_\infty.$$

$B_{21}(t)$ və $B_{22}(t)$ -ni birləşdirməklə

$$\|B_2(\cdot)\|_{2,\rho}\le A_2(\rho,\omega,a,b)\|U_{n-1}\|_{2,\rho}E_{n-1}^{(1)}(R)_\infty,$$

burada

$$A_2(\rho,\omega,a,b)=2\left(\|a\|_\infty+\|b\|_\infty\right)r_0^{-1}(\rho_0\omega_0)^{1/2}$$

Beləliklə son olaraq alırıq ki,

$$\|MU_{n-1}-M_{n-1}U_{n-1}\|_{2,\rho}\le\left(A_1(\rho,\omega,a,b)E_{n-1}^{(2)}(R)_\infty+A_2(\rho,\omega,a,b)E_{n-1}^{(1)}(R)_\infty\right)\|U_{n-1}\|$$

X fəzasında *F(t)-F*$_{n-1}$*(t)* fərqini qiymətləndirək. Nəzərə alsaq ki, *B(ω(·)L*$_{m-1}$*(f,·;ω))(t)* *n-1* dərəcəli cəbri çoxhədlidir, onda alarıq ki,

$$F(t)-F_{n-1}(t)=a(t)\omega(t)(f(t)-L_{m-1}(f,t;\omega))-\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{f(\xi)-L_{m-1}(f,\xi;\omega)}{\xi-t}d\xi.$$ Məlum

ifadələri nəzərə almaqla taparıq ki,

$$\int_{-1}^{1}\rho(t)\left|F(t)-F_{n-1}(t)\right|^2dt\le 2\int_{-1}^{1}\rho(t)a^2(t)\,\omega^2(t)(f(t)-L_{m-1}(f,t;\omega))^2dt+$$

$$+2\int_{-1}^{1}\rho(t)\left(\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{f(\xi)-L_{m-1}(f,\xi;\omega)}{\xi-t}d\xi\right)^2dt\le 2r_0^{-2}\|a\|_\infty\int_{-1}^{1}\omega(t)(f(t)-$$

$$L_{m-1}(f,t;\omega))^2dt+2r_0^{-2}\|b\|_\infty\int_{-1}^{1}\frac{1}{\omega(t)}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega(\xi)\frac{f(\xi)-L_{m-1}(f,\xi;\omega)}{\xi-t}d\xi\right)^2dt\le$$

$$\le 8r_0^{-2}\omega_0\left(\|a\|_\infty^2+B_0^2(\omega)\|b\|_\infty^2\right)\left(E_{m-1}(f)_\infty\right)^2$$

Beləliklə,

$$\|F-F_{n-1}\|_{2,\rho}\le A_3(\omega,a,b)E_{m-1}(f)_\infty$$

burada,

$$A_3(\omega,a,b)=2r_0^{-1}(2\omega_0)^{1/2}\left(\|a\|_\infty^2+B_0^2(\omega)\|b\|_\infty^2\right)^{1/2}$$

Beləliklə aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 3.3. Tutaq ki, $\chi>0$ və (1.2) tənliyinin (1.4) şərtləri daxilində $U^* \in L_{2,\rho}$ yeganə həlli var. Onda istənilən $n \geq max((\ell-\chi, n_0(\chi))$ üçün (3.21) xətti cəbri tənliklər sisteminin yeganə $z_n^* = (z_{1n}^*,..,z_{nn}^*)$ həlli var və (1.2)-(1.3) tənliklərinin $U_{n-1}^* \equiv L_{n-1}(z_n^*, t; \rho)$ təqribi həlləri $U^*(t)$ dəqiq həllinə yığılır, bununla belə

$$\|U^* - U_{n-1}^*\|_{2,\rho} \leq \left(A_3(\omega, a, b) E_{m-1}(f)_\infty + \delta_n(\chi)\|F\|_{2,\rho} \right)(1-\delta_n(\chi))^{-1}\|M^{-1}\|_{2,\rho} \quad (3.23)$$

Təklif 3.1. Əgər $f \in W^2 H_\mu([-1,1])$ və $R \in W^2 H_{\mu,\mu}([-1,1]^2)$, olsa onda (3.23) aşağıdakı şəklə düşər.

$$\| U^* - U_{n-1}^*\|_{2,\rho} \leq A(\rho, \omega, a, b, f, R) n^{-r-\mu}$$

burada A-göstərilən parametrlərdən asılı sabitdir.

$\chi=0$ halı. Tutaq ki, (1.2) tənliyinin X-də yeganə $U^*(t)$ həlli var. Yəni bircins $Mu=0$ tənliyinin X-də yalnız sıfır həlli var. Teorem 3.1-ə əsasən (3.2) xətti cəbri tənliklər sistemi

$$z_{jn} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{a}_{ji} R_{ik}\right) z_{kn} = F_{j,n} \quad j = 1,..,n \quad (3.24)$$

xətti cəbri tənliklər sisteminə ekvivalentdir, burada $F_{j,n} = \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_{ji} f_{i,n}$

Aydındır ki, (3.24) sistemini aşağıdakı operator tənliyi şəklində yazmaq olar.

$$M_{n-1} U_{n-1} \equiv U_{n-1} + T_{n-1} U_{n-1} = E_{n-1}$$

burada,

$$U_{n-1} \in X_{n-1}, \quad T_{n-1}(U_{n-1})(t) \equiv \int_{-1}^{1} \rho(\tau) L_{n-1}(M_{n-1}(t,\tau) U_{n-1}(\tau), \tau; \rho)\, d\tau$$

$$M_{n-1}(t,\tau) = a(t)\omega(t) L_{n-1}(R(t,\tau), t; \omega) - \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1} \omega(\xi) \frac{L_{n-1}(R(\xi,\tau), \xi; \omega)}{\xi - t} d\xi,$$

$$F_{n-1}(t) = L_{n-1}(B(\omega(\cdot) L_{n-1}(f, \cdot; \omega)))$$

$\chi=0$ halında

$$\|MU_{n-1} - M_{n-1}U_{n-1}\|_{2,\rho} \leq A_1(\rho, \omega, a, b) E_{n-1}^{(1)}(R)_\infty + A_2(\rho, \omega, a, b) E_{n-1}^{(2)}(R)_\infty \|U_{n-1}\|_{2,\rho}$$

$$\|F - F_{n-1}\|_{2,\rho} \leq A_3(\omega, a, b) E_{n-1}(f)_\infty .$$

Beləliklə, aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 3.4. Tutaq ki, $\chi=0$ və (1.2) tənliyinin $U^* \in L_{2,\rho}$ yeganə həlli var. Onda istənilən

$n \geq \max\{n \in N; \delta_n(0) \equiv \left(A_1(\rho,\omega,a,b)E_{n-1}^{(1)}(R)_\infty + A_2(\rho,\omega,a,b)E_{n-1}^{(2)}(R)_\infty\right)\left\|M^{-1}\right\|_{2,\rho} < 1\}$

üçün (3.2) sisteminin yeganə $U_{n-1}^*(t) \equiv L_{n-1}\left(z_n^j, t; \rho\right)$ həlli və (1.2) tənliyinin $U_n^*(t) \equiv L_{n-1}\left(z_n^j, t; \rho\right)$ təqribi həlli $U^*(t)$ dəqiq həllinə yığılır, bununla belə

$$\left\|U^* - U_{n-1}^*\right\|_{2,\rho} \leq \left(A_3(\rho,a,b)E_{n-1}(f)_\infty + \delta_n(0)\left\|F\right\|_{2,\rho}\right)(1-\delta_n(0))^{-1}\left\|M^{-1}\right\|_{2,\rho}.$$

$\chi<0$ halı. Tutaq ki, bircins $Mu=0$ tənliyinin $X=L_{2,\rho}$-də yalnız sıfır həlli var. Onda (1.5) tənliyinin təqribi həllini aşağıdakı şəkildə axtaracağıq.

$$\upsilon_n = \left(L_{n-1}(z_n, t; \rho), \varepsilon_{1n}, .., \varepsilon_{-\chi n}\right)$$

burada, $z_n=(z_{1,n},..,z_{n,n})^T$, $L_{n-1}(z_n,t;\rho) = \sum_{j=1}^{n} z_{jn}\ell_{jn}(t;\rho)$, $(z_{1n},..,z_{nn},\varepsilon_{1n},..,\varepsilon_{-\chi n})$ məchulları isə aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sistemindən təyin edilirlər.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+R_{ij}\right)z_{jn} + \sum_{k=1}^{-\chi}\varepsilon_{kn}x_k\left(t_{i,m}\right) = f_{i,m}, \qquad i=1,..,n \tag{3.25}$$

Burada, $f_{i,m}=f(t_{i,m})$, $x_k(t)=b(t)t^{k-1}$, $k=1,..,-\chi$, $m=n-\chi$. (3.25) sistemini

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+R_{ij}\right)z_{jn} + \sum_{k=1}^{-\chi}\varepsilon_{kn}x_k\left(t_{i,m}\right) = f_{i,m} - \sum_{j=1}^{n}R_{ij}z_{jn}, \qquad i=1,..,n$$

şəklində yazaq. Bu sistem

$$z_{jn} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_{ji}R_{ik}\right)z_{kn} = F_j \quad j=1,..,n \tag{3.26}$$

sistemi ilə və

$$\varepsilon_{kn} = \frac{1}{\Delta(\chi)}\sum_{s=1}^{-\chi}\Delta_{sk}(\chi)\sum_{i=1}^{m}\lambda_{i,m}(\omega)\left(f_{i,m} - \sum_{j=1}^{n}R_{ij}z_{jn}\right)t_{i,m}^{s-1}, \quad k=1,..,-\chi \tag{3.27}$$

münasibətləri ilə eynigüclüdür. Burada nəzərə alınmışdır ki, $\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_{ji}x_k\left(t_{i,m}\right) = 0$.

Beləliklə, (3.25) sisteminin həll varlığını isbat etmək üçün (3.26) sisteminin həllinin olduğunu isbat etmək kifayətdir.

Aydındır ki, (3.26) sistemini aşağıdakı kimi operator tənliyi çəklində yaza bilərik.

$$M_{n-1}U_{n-1} \equiv U_{n-1} + T_{n-1}U_{n-1} = F_{n-1}$$

burada, $U_{n-1} \in X_{n-1}$, T_{n-1} operatoru və $M_{m-1}(t,\tau)$ funksiyası $\chi>0$ halı üçün təyin olunmuşdur.

$$F_{n-1}(t) = L_{n-1}\big(B(\omega(\cdot)L_{m-1}(f,\cdot;\omega),t;\rho)\big)$$

Tutaq ki, $n \ge \max(\ell, n_0(\chi))$. *Mu=0* tənliyinin yalnız sıfır həlli olduğu üçün (3.26) sisteminin yeganə $z_n^* = (z_{1n}^*,..,z_{nn}^*)$ həlli və $U_{n-1}^*(t) \equiv L_{n-1}(z_n^j, t;\rho)$ təqribi həlləri var, $n \ge \max(\ell, n_0(\chi))$ olduqda (1.6) tənliyi *X* fəzasınada $U^*(t)$ dəqiq həllinə yığılırlar, bununla belə

$$\left\|U^* - U_{n-1}^*\right\|_{2,\rho} \le \left(A_3(\omega,a,b)E_{m-1}(f)_\infty + \delta_n(0)\left\|F\right\|\right)(1-\delta_n(0))^{-1}\left\|M^{-1}\right\|_{2,\rho}.$$

Beləliklə, *Mu=0* tənliyinin yalnız sıfır həlli olduqda, onda, bütün $n \ge \max(\ell, n_0(\chi))$ üçün (3.25) sisteminin yeganə $(z^*_{1n},..,z^*_{nn},\varepsilon^*_{1n},..,\varepsilon^*_{-\chi n})$ həlli var, burada

$$\varepsilon_{kn}^* = \frac{1}{\Delta(\chi)}\sum_{s=1}^{-\chi}\Delta_{sk}(\chi)\sum_{i=1}^{m}\lambda_{i,m}(\omega)\left(f_{i,m} - \sum_{j=1}^{n}R_{ij}z_{jn}^*\right)t_{i,m}^{s-1},\quad k=1,..,-\chi$$

Əgər (1.6) tənliyinin $U^* \in X$ həlli üçün (1.7) şərtləri ödənilərsə, onda U^* həm də (1.2) tənliyinin yeganə həllidir və ona görə də $\{U_{n-1}^*(t)\}$ ardıcıllığını təbii olaraq onun təqribi həlləri ardıcıllığı kimi qəbul etmək olar.

$$\varepsilon_k^* = \frac{1}{\Delta(\chi)}\sum_{s=1}^{-\chi}\Delta_{sk}(\chi)\,\ell_s(f,R,U^*),\quad k=1,..,-\chi$$

$$\omega_q = \int_{-1}^{1}\omega(\tau)\tau^q d\tau,\qquad A_4(\rho,\omega,R) = \left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\rho(\xi)\omega(\tau)R^2(\tau,\xi)d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

işarə edək, burada $\ell_v(f,R,u)$, $v=1,..,-\chi$ – (1.7)-dən təyin edilmişdir. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 3.5. Tutaq ki, (1.6) tənliyinin $U^* \in L_{2,\rho}$ yeganə həlli var. Onda bütün $n \ge \max(\ell, n_0(\chi))$ üçün

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon_k^* - \varepsilon_{kn}^*\right| &\le (2\omega_0^{1/2}E_{m-1}(f)_\infty + 2(\rho_0\omega_0)^{1/2}\left(E_{m-1}^{(1)}(R)_\infty + E_{n-1}^{(2)}(R)_\infty\right)\left\|U_{n-1}^*\right\|_{2,\rho} + \\ &+ A_4(\rho,\omega,R)\left\|U^* - U_{n-1}^*\right\|_{2,\rho})\sum_{s=1}^{-\chi}\left|\frac{\Delta_{sk}(\chi)}{\Delta(\chi)}\right|(\omega_{2s-2})^{1/2},\quad k=1,..,-\chi\end{aligned} \tag{3.28}$$

İsbatı: Tutaq ki, $n \ge \max(\ell, n_0(\chi))$. Onda

$$\varepsilon_k^* - \varepsilon_{kn}^* = \sum_{s=1}^{-\chi}\frac{\Delta_{sk}(\chi)}{\Delta(\chi)}[\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\tau^{s-1}(f(\tau) - L_{m-1}(f,\tau;\omega))d\tau -$$

$$-\int_{-1}^{1}\rho(\xi)\left(\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\tau^{s-1}R(\tau,\xi)d\tau\right)\left(U^*(\xi)-U_{n-1}^*(\xi)\right)d\xi-$$

$$-\int_{-1}^{1}\rho(\xi)\left(\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\tau^{s-1}[R(\tau,\xi)-L_{n-1}(R(\tau,\xi),\xi;\rho)]\,d\tau\right)U_{n-1}^*(\xi)d\xi-$$

$$-\int_{-1}^{1}\rho(\xi)\left(\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\tau^{s-1}L_{n-1}(R(\tau,\xi),\xi;\rho)d\tau-L_{n-1}\left(\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\tau^{s-1}L_{m-1}(R(\tau,\xi),\tau;\omega)d\tau,\xi;\rho\right)\right)\times$$

$$\times U_{n-1}^*(\xi)d\xi=\sum_{s=1}^{-\chi}\frac{\Delta_{sk}(\chi)}{\Delta(\chi)}\left(D_1(s)-D_2(s)-D_3(s)-D_4(s)\right).$$

$$|D_1(s)|\le\left(\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\tau^{2s-2}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-1}^{1}\omega(\tau)(f(\tau)-L_{m-1}(f,\tau;\omega))^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le 2\left(\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\,d\tau\cdot\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\,\tau^{2s-2}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}E_{m-1}(f)_\infty=2(\omega_0\,\omega_{2s-2})E_{m-1}(f)_\infty,$$

$$|D_2(s)|\le\left(\int_{-1}^{1}\rho(\xi)\left|U^*(\xi)-U_{n-1}^*(\xi)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-1}^{1}\rho(\xi)\left|\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\tau^{s-1}R(\tau,\xi)d\tau\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le(\omega_{2s-2})^{1/2}\cdot A_4(\rho,\omega,R)\,\left\|U^*-U_{n-1}^*\right\|_{2,\rho},$$

$$|D_3(s)|\le 2\left\|U_{n-1}^*\right\|_{2,\rho}\left(\int_{-1}^{1}\rho(\xi)\left|\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\,\tau^{s-1}[R(\tau,\xi)-L_{n-1}(R(\tau,\xi),\xi;\rho)]^{\,2}d\tau\right|d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le 2\left\|U_{n-1}^*\right\|_{2,\rho}(\rho_0\,\omega_0\,\omega_{2s-2})^{1/2}E_{n-1}^{(2)}(R)_\infty,$$

$$|D_3(s)|\le\left|\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\left[\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\,\tau^{s-1}R(\tau,\tau_{j,n})d\tau-\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\,\tau^{s-1}L_{n-1}(R(\tau,\tau_{j,n}),\tau;\omega)d\tau\right]U_{n-1}^*(\tau_{j,n})\right|\le$$

$$\le\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)U_{n-1}^{*\,2}(\tau_{j,n})\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\left|\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\,\tau^{s-1}R(\tau,\tau_{j,n})\,d\tau-L_{n-1}(R(\tau,\tau_{j,n}),\tau;\omega)\,d\tau\right|^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le\left\|U_{n-1}^*\right\|_{2,\rho}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\,\omega_{2s-2}\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\left|R(\tau,\tau_{j,n})\,d\tau-L_{m-1}(R(\tau,\tau_{j,n}),\tau;\omega)\right|^{\,2}d\tau\right)^{1/2}\le$$

$$\le 2(\rho_0\,\omega_0\,\omega_{2s-2})^{1/2}E_{m-1}^{(1)}(R)_\infty\left\|U_{n-1}^*\right\|_{2,\rho}.$$

Bununla da teorem isbat olunur.

Beləliklə həlli tapmaq üçün [-1,1] parçasını n bərabər hissəyə bölək:

$t_k = -1 + \frac{2}{n} \cdot k$ götürsək baxılan inteqral tənlik aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sistemi ilə əvəz olunur:

$$\begin{cases} a_{11}Y(t_1) + a_{12}Y(t_2) + \ldots + a_{1n}Y(t_n) = f(t_1) \\ a_{21}Y(t_1) + a_{22}Y(t_2) + \ldots + a_{2n}Y(t_n) = f(t_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}Y(t_1) + a_{n2}Y(t_2) + \ldots + a_{nn}Y(t_n) = f(t_n) \end{cases}$$

Burada

$$a_{ij} = \begin{cases} a(t_i) + \frac{2b(t_i)}{\pi n} \cdot \frac{1}{t_j - t_i}, & i \neq j \ olduqda \\ a(t_i), & i = j \ olduqda \end{cases}$$

kimidir.

Ədəbiyyat.

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа, М. , Физматчиз, 1962 г.

2. Мысовскин И.П. О сходимости метода механических кубатур для решения интегральных уравнений. В сб. “Методы вычислений”. ЛГУ, 1967 г., с. 63-72.

3. Вайникко Г.М. О сходимости метода механических квадратур для интегральных уравнений с разрывными ядрами. Сиб. мат. жур. , т. XII, № 1, 1971 г. с. 40-53.

4. Габдулхаев Б.Г. Некоторые вопросы приближенных методов. Учен. зап. Казанск. ун-та, т. 128, ин. 3, 1968 г., с. 20-29.

5. Ахилзер Н.И. Лекции по теории аппроксимации, М., "Наука", 1965 г.

6. Мысовскин И.П. О методе механических квадратур для решения интегральных уравнений. Вестник ЛГУ, сер., мат., мех., астр., 1962 г., № 7, с. 78-88,

Giriş.

Buraxılış işi bir çox fizika və mexanika məsələlərinin həllində böyük əhəmiyyət kəsb edən

$$a(t)\cdot Y(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Y(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t)$$

sinqulyar inteqral tənliyinə həsr olunmuşdur. Burada $a(t)$, $b(t)$ və $f(t)$ Hölder sinfinə daxil olan verilən funksiyalar, $Y(t)$ isə axtarılan funksiyadır.

Məlumdur ki, bir çox hallarda verilmiş tənliyin dəqiq həllini tapmaq mümkün deyil. Məhz buna görə də bu tənliyinin təqribi həllinin tapılması məsələsi böyük əhəmiyyət kəsb edir.

Buraxılış işi üç bölmədən ibarətdir. Birinci bölmədə sinqulyar inteqral tənliklər nəzəriyyəsi haqqında əsas məlumatlar verilmişdir. İkinci bölmə sinqulyar inteqral tənliklərlə əlaqədar olan ortoqonal çoxhədlilərin bəzi əsas xassələrinə həsr olunmuşdur. Nəhayət üçüncü bölmədə verilmiş sinqulyar inteqral tənliyin təqribi həllinin qurulması üçün kvadratur metodunun ümumi sxemi və bu sxemin əsaslandırılması verilmişdir.

Koşi nüvəli sinqulyar inteqral tənliyin parçada konstruktiv həll üsulu.

Fakultə: İ, BİM və M	Tələbə: Seyidnurov İ.S.
Kafedra: Tətbiqi riyaziyyat	Rəhbər: dos. Xəlilov
İxtisas: TE100100	Qrup: 765-3

$$a(t)\cdot Y(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Y(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t) \qquad (1)$$

$$K^0 Y\equiv K_0 Y+RY=f \qquad (1.1)$$

$$K_0 Y(t)\equiv a(t)Y(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Y(\tau)}{\tau-t}d\tau, \quad RY(t)\equiv\int_{-1}^{1}R(t,\tau)Y(\tau)d\tau,$$

$(a,b,f,R)\in H([-1,1])$, $t\in[-1,1]$ üçün $a^2(t)+b^2(t)>0$, $a(t)\equiv 0$ və $b(t)\neq 0$, $b(t)\equiv 1$.

$(h_0,h(-1),h(1),h(-1,1))\in\Phi,\quad \Phi\in H([-1,1])$

$$K^0(\rho u)(t)=f(t) \qquad (1.2)$$

$\rho(t) = z(t)/r(t)$, $r(t) = \left(a^2(t) + b^2(t)\right)^{1/2}$, $\chi = -(p+q)$.

$$z(t) = (1-t)^p (1+t)^q \exp\left(-\int_{-1}^{1} (\tau - t)^{-1} \theta(\tau) d\tau\right), \quad t \in (-1,1)$$

Teorem 1.1.

Əgər $\chi > 0$, onda

$$K(\rho u)(t) = f(t) \tag{1.3}$$

tənliyinin

$$\int \rho(\tau) \tau^k u(\tau)\, d\tau = D_k, \quad k = 0,1,2,\dots,\chi - 1 \tag{1.4}$$

şərtləri ödəndikdə

$$U(t) = B(\omega f)(t) + b(t)\, Q_{\chi-1}(t)$$

yeganə həlli var.

Əgər $\chi = 0$ olarsa, onda (1.3) tənliyinin yeganə $u(t) = B(\omega f)(t)$ həlli var.

Əgər $\chi < 0$ olarsa, onda (1.3) tənliyi yalnız və yalnız o halda həll olunandır ki,

$$\int_{-1}^{1} \omega(\tau) \tau^{k-1} f(\tau)\, d\tau = 0, \qquad k = 1,2,\dots,\chi$$

şərtləri ödənilsin və həll $u(t) = B(\omega f)(t)$ düsturu ilə verilir. Burada

$$B(x)(t) \equiv a(t)\, x(t) - \frac{b(t)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

$$\ell_{j,n} = \frac{P_n(t;\rho)}{(t - \tau_{j,n}) P_n'(\tau_{j,n};\rho)}, \quad j = 1,2,..,n \qquad \text{və}$$

$$\lambda_{j,n}(\rho) = \int_{-1}^{1} \rho(\tau)\, \ell_{j,n}(\tau;\rho) d\tau, \quad j = 1,2,..,n$$

$$\int_{-1}^{1} \rho(\tau)\, u(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,n}(\rho)\, u(\tau_{j,n}) + R_n^G(u,\rho), \; j = 1,2,..,n \tag{3.1}$$

$$h_{n-1}(z_n, t;\rho) = \sum_{j=1}^{n} z_{j,n} \ell_{j,n}(t;\rho), \; z_n = \left(z_{1,n}, z_{2,n}, .., z_{n,n}\right)^T$$

$$(A_n + R_n)\, z_n = f_m \tag{3.2}$$

$f_m = \left(f(t_{1,m}), .., f(t_{m,m})\right)$, $m = n - \chi$, $t_{i,m}, i = 1,..,m -$ isə $q_m(t) = q_m(t;\omega)$, $A_n=(a_{ij})$, $R_n=(R_{ij})$- mxn.

$$a_{i,j} = \begin{cases} -\dfrac{b(t_{i,m})\lambda_{j,n}(\rho)}{\pi(t_{i,m} - \tau_{j,n})}, & \tau_{j,n} \neq t_{i,m}, \\[2ex] (-1)^{\chi} \dfrac{q_m'(\tau_{j,n};\omega)}{P_m(\tau_{j,n};\rho)} - \dfrac{1}{\pi}\lambda_{j,n}(\rho) b(\tau_{j,n}'), & \tau_{j,n} = t_{i,m}, \end{cases} \qquad R_{i,j} = \lambda_{j,n}(\rho)\, R(t_{i,m}, \tau_{j,n}).$$

(3.2) sistemi aşağıdakı kimi qurulur. Nəzərə alsaq ki,

$$K_0 = (\rho(\cdot)\, P_n(\cdot;\rho))(t) = (-1)^{\chi} q_m(t;\omega) \quad \text{və} \quad q_m(\tau_{j,n};\omega) = (-1)^{\chi} \pi^{-1} b(\tau_{j,n})\lambda_{j,n}(\rho) P_n'(\tau_{j,n};\rho),$$

$$K_0 = (\rho(\cdot)\; L_{n-1}(u,\cdot;\rho))(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{\chi}\left(q_m(t;\omega) - q_m(\tau_{j,n};\omega) - \pi^{-1}(b(t) - b(\tau_{j,n}))\lambda_{j,n}(\rho) P_n'(\tau_{j,n};\rho)\right)}{(t-\tau_{j,n}) P_n'(\tau_{j,n};\rho)} u(\tau_{j,n}$$

$$K_0(\rho u)(t) = a(t)\rho(t)\,(u(t)L_{n-1}(u,t;\rho)) + K_0(\rho(\cdot)\; L_{n-1}(u,\cdot;\rho))(t) + b(t)R_n(u,t;\rho),$$ burada

$$R_n(u,t;\rho) = \pi^{-1}\int_{-1}^{1} \rho(\tau)(\tau - t)^{-1}(u(\tau) - L_{n-1}(u,\tau;\rho))\, d\tau.$$

Əvvəlki münasibətə əsasən

$$K_0(\rho u)(t_{i,m}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} u(\tau_{j,n}) + a(t_{i,m})\rho(t_{i,m})(u(t_{i,m}) - L_{n-1}(u, t_{i,m};\rho)) +$$
$$+ b(t_{i,m})R_n(u, t_{i,m};\rho), \quad i = 1,2,..,m,$$

$$\int_{-1}^{1} \rho(\tau) R(t_{i,m};\tau) u(\tau)\, d\tau = \sum_{j=1}^{n} R_{i,j} u(\tau_{j,n}) + R_n(R(t_{i,m};\cdot)u(\cdot);\rho).$$

Beləliklə $t=t_{i,m}$, $i=1,..,m$ götürməklə

$$(a_{i,j} + R_{i,j})\, u(\tau_{j,n}) = f(t_{i,m}) - a(t_{i,m})\rho(t_{i,m})(u(t_{i,m}) - L_{n-1}(u, t_{i,m};\rho)) -$$
$$- b(t_{i,m}) R_n(u, t_{i,m};\rho) - R_n^G(R(t_{i,m};\cdot)\, u(\cdot);\rho).$$

$t=t_{i,m}$ olduqda $a(t_{i,m})\rho(t_{i,m})(u(t_{i,m}) - L_{n-1}(u,t_{i,m};\rho))$, $b(t_{i,m})\, R_n(u,t_{i,m};\rho)$ və $R_n^G(R(t_{i,m};\cdot)\, u(\cdot);\rho)$

qiymətlərini nəzərə almamaqla axtarılan $u(t)$ funksiyasının $u(\tau_{j,n})=z_n$ $j=1,..,n$ təqribi qiymətlərinə nəzərən (3.2) xətti sisteminə gəlirik.

Beləliklə həlli tapmaq üçün [-1,1] parçasını n bərabər hissəyə bölək:

$t_k = -1 + \frac{2}{n} \cdot k$ götürsək baxılan inteqral tənlik aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sistemi ilə əvəz olunur:

$$
\begin{cases}
a_{11}Y(t_1)+a_{12}Y(t_2)+\ldots+a_{1n}Y(t_n)=f(t_1)\\
a_{21}Y(t_1)+a_{22}Y(t_2)+\ldots+a_{2n}Y(t_n)=f(t_2)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n1}Y(t_1)+a_{n2}Y(t_2)+\ldots+a_{nn}Y(t_n)=f(t_n)
\end{cases}
$$

Burada

$$
a_{ij}=\begin{cases}
a(t_i)+\dfrac{2b(t_i)}{\pi n}\cdot\dfrac{1}{t_j-t_i}, & i\neq j \ \ olduqda\\
a(t_i) \ , & i=j \ \ olduqda
\end{cases}
$$

olduğu nəzərə alınmışdır.

Koşi nüvəli sinqulyar inteqral tənliyin parçada konstruktiv həll üsulu.

Fakultə: İ, BİM və M — Tələbə: Seyidnurov İ.S.

Kafedra: Tətbiqi riyaziyyat — Rəhbər: dos. Xəlilov

İxtisas: TE100100 — Qrup: 765-3

$$a(t)\cdot Y(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Y(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t) \qquad (1)$$

$$K^0Y\equiv K_0Y+RY=f \qquad (1.1)$$

$$K_0Y(t)\equiv a(t)Y(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Y(\tau)}{\tau-t}d\tau, \qquad RY(t)\equiv\int_{-1}^{1}R(t,\tau)Y(\tau)d\tau,$$

$(a,b,f,R)\in H([-1,1])$, $t\in[-1,1]$ üçün $a^2(t)+b^2(t)>0$, $a(t)\equiv 0$ və $b(t)\neq 0$, $b(t)\equiv 1$.

$(h_0,h(-1),h(1),h(-1,1))\in\Phi,\quad \Phi\in H([-1,1])$

$$K^0(\rho u)(t)=f(t) \qquad (1.2)$$

$\rho(t)=z(t)/r(t)$, $r(t)=\left(a^2(t)+b^2(t)\right)^{1/2}$, $\chi=-(p+q)$.

$z(t)=(1-t)^p(1+t)^q\exp(-\int_{-1}^{1}(\tau-t)^{-1}\theta(\tau)d\tau),\quad t\in(-1,1)$

Teorem 1.1.

Əgər $\chi>0$, onda $K(\rho u)(t)=f(t)$ (1.3)

tənliyinin

$$\int\rho(\tau)\tau^k u(\tau)\,d\tau=D_k,\quad k=0,1,2,...,\chi-1 \qquad (1.4)$$

şərtləri ödəndikdə $U(t)=B(\omega f)(t)+b(t)\,Q_{\chi-1}(t)$

yeganə həlli var.

Əgər $\chi=0$ olarsa, onda (1.3) tənliyinin yeganə $u(t)=B(\omega f)(t)$ həlli var.

Əgər $\chi<0$ olarsa, onda (1.3) tənliyi yalnız və yalnız o halda həll olunandır ki,

$$\int_{-1}^{1}\omega(\tau)\tau^{k-1}f(\tau)\,d\tau=0,\qquad k=1,2,...,\chi$$

şərtləri ödənilsin və həll $u(t)=B(\omega f)(t)$ düsturu ilə verilir. Burada

$$B(x)(t)\equiv a(t)\,x(t)-\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)}{\tau-t}d\tau.$$

$$\ell_{j,n}=\frac{P_n(t;\rho)}{(t-\tau_{j,n})P_n'(\tau_{j,n};\rho)},\quad j=1,2,..,n \quad \text{və}$$

$$\lambda_{j,n}(\rho)=\int_{-1}^{1}\rho(\tau)\,\ell_{j,n}(\tau;\rho)d\tau,\quad j=1,2,..,n$$

$$\int_{-1}^{1}\rho(\tau)\,u(\tau)d\tau=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}(\rho)\,u(\tau_{j,n})+R_n^G(u,\rho),\ j=1,2,..,n \qquad (3.1)$$

$$h_{n-1}(z_n,t;\rho)=\sum_{j=1}^{n} z_{j,n}\ell_{j,n}(t;\rho),\ z_n=(z_{1,n},z_{2,n},..,z_{n,n})^T$$

$$(A_n+R_n)z_n=f_m \qquad (3.2)$$

$f_m=(f(t_{1,m}),..,f(t_{m,m}))$, $m=n-\chi$, $t_{i,m}, i=1,..,m-$ isə $q_m(t)=q_m(t;\omega)$, $A_n=(a_{ij})$, $R_n=(R_{ij})$- mxn.

$$a_{i,j}=\begin{cases}-\dfrac{b(t_{i,m})\lambda_{j,n}(\rho)}{\pi(t_{i,m}-\tau_{j,n})}, & \tau_{j,n}\neq t_{i,m},\\ (-1)^{\chi}\dfrac{q_m'(\tau_{j,n};\omega)}{P_m(\tau_{j,n};\rho)}-\dfrac{1}{\pi}\lambda_{j,n}(\rho)b(\tau'_{j,n}), & \tau_{j,n}=t_{i,m},\end{cases}, \qquad R_{i,j}=\lambda_{j,n}(\rho)R(t_{i,m},\tau_{j,n}).$$

(3.2) sistemi aşağıdakı kimi qurulur. Nəzərə alsaq ki,

$K_0=(\rho(\cdot)P_n(\cdot;\rho))(t)=(-1)^{\chi}q_m(t;\omega)$ və $q_m(\tau_{j,n};\omega)=(-1)^{\chi}\pi^{-1}b(\tau_{j,n})\lambda_{j,n}(\rho)P_n'(\tau_{j,n};\rho)$,

$$K_0=(\rho(\cdot)\ L_{n-1}(u,\cdot;\rho))(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{\chi}\left(q_m(t;\omega)-q_m(\tau_{j,n};\omega)-\pi^{-1}(b(t)-b(\tau_{j,n}))\lambda_{j,n}(\rho)P_n'(\tau_{j,n};\rho)\right)}{(t-\tau_{j,n})P_n'(\tau_{j,n};\rho)}u(\tau_{j,n}$$

$K_0(\rho u)(t)=a(t)\rho(t)\,(u(t)L_{n-1}(u,t;\rho))+K_0(\rho(\cdot)\ L_{n-1}(u,\cdot;\rho))(t)+b(t)R_n(u,t;\rho)$, burada

$$R_n(u,t;\rho)=\pi^{-1}\int_{-1}^{1}\rho(\tau)(\tau-t)^{-1}(u(\tau)-L_{n-1}(u,\tau;\rho))\,d\tau.$$

Əvvəlki münasibətə əsasən

$$K_0(\rho u)(t_{i,m})=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}u(\tau_{j,n})+a(t_{i,m})\rho(t_{i,m})(u(t_{i,m})-L_{n-1}(u,t_{i,m};\rho))+$$
$$+b(t_{i,m})R_n(u,t_{i,m};\rho),\quad i=1,2,..,m,$$

$$\int_{-1}^{1}\rho(\tau)R(t_{i,m},\tau)u(\tau)d\tau=\sum_{j=1}^{n}R_{i,j}u(\tau_{j,n})+R_n(R(t_{i,m},\cdot)u(\cdot);\rho).$$

Beləliklə $t=t_{i,m}$, $i=1,..,m$ götürməklə

$$\left(a_{i,j}+R_{i,j}\right)u\left(\tau_{j,n}\right)=f\left(t_{i,m}\right)-a\left(t_{i,m}\right)\rho\left(t_{i,m}\right)\left(u\left(t_{i,m}\right)-L_{n-1}\left(u,t_{i,m};\rho\right)\right)-$$

$$-b\left(t_{i,m}\right)R_n\left(u,t_{i,m};\rho\right)-R_n^G\left(R\left(t_{i,m},\cdot\right)u(\cdot);\rho\right).$$

$t=t_{i,m}$ olduqda $a(t_{i,m})\rho(t_{i,m})(u(t_{i,m})-L_{n-1}(u,t_{i,m};\rho))$, $b(t_{i,m})R_n(u,t_{i,m};\rho)$ və $R_n^G\left(R\left(t_{i,m},\cdot\right)u(\cdot);\rho\right)$

qiymətlərini nəzərə almamaqla axtarılan $u(t)$ funksiyasının $u(\tau_{j,n})=z_n$ $j=1,..,n$ təqribi qiymətlərinə nəzərən (3.2) xətti sisteminə gəlirik.

Beləliklə həlli tapmaq üçün [-1,1] parçasını n bərabər hissəyə bölək: $t_k=-1+\frac{2}{n}\cdot k$ götürsək baxılan inteqral tənlik aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sistemi ilə əvəz olunur:

$$\begin{cases} a_{11}Y(t_1)+a_{12}Y(t_2)+...+a_{1n}Y(t_n)=f(t_1) \\ a_{21}Y(t_1)+a_{22}Y(t_2)+...+a_{2n}Y(t_n)=f(t_2) \\ .... \\ a_{n1}Y(t_1)+a_{n2}Y(t_2)+...+a_{nn}Y(t_n)=f(t_n) \end{cases}$$

Burada

$$a_{ij}=\begin{cases} a(t_i)+\dfrac{2b(t_i)}{\pi n}\cdot\dfrac{1}{t_j-t_i}, & i\neq j \ \ olduqda \\ a(t_i), & i=j \ \ olduqda \end{cases}$$

olduğu nəzərə alınmışdır.

Mündəricat.

Nəticə.

Buraxılış işində aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

1. Sinqulyar inteqral tənliklərlə əlaqədar olan ortoqonal çoxhədlilərin əsas xassələri verilmişdir;

2. Baxılan sinqulyar inteqral tənlik üçün kvadratur metodun sxemi qurulmuşdur;

3. Kvadratur metodunun qurulan sxeminin əsaslandırılması verilmişdir;

4. "Turbo Pascal 7.0" alqoritmik dilində təklif olunan sxemə uyğun proqram tərtib edilmiş və hesabatlar aparılmışdır.

```
Proqram Integral;
Uses Crt;
Const n=11;
Var
   a:array[1..n,1..n] of real;
   b,Y:array[1..n] of real;
   i,j,k:integer;
{---------------------------------------------}
Function aa(t:Real):Real;
 Begin
    aa:=t;
 End;
{---------------------------------------------}
Function bb(t:Real):Real;
 Begin
    bb:=1;
 End;
{---------------------------------------------}
Function f(t:Real):Real;
 Begin
```

```
    f:=t*t;
 End;
{----------------------------------------------}
Begin
 ClrScr;
 For i:=1 to n do
   For j:=1 to n do
     If i<>j Then a[i,j]:=aa(-1+2*i/n)+2*bb(-1+2*i/n)/
                                        ((Pi*n)*(-1+2*j/n-(-1+2*i/n)))
              Else a[i,j]:=aa(-1+2*j/n);

 For i:=1 to n do
     b[i]:=f(-1+2*j/n);
 k:=1;
Repeat
  For i:=k+1 to n do
   b[i]:=b[i]-b[k]/a[k,k]*a[i,k];
   For i:=k+1 to n do
   For j:=k to n do
   a[i,j]:=a[i,j]-a[k,j]/a[k,k]*a[i,k];
   inc(k);
Until k>=n;

Y[n]:=b[n]/a[n,n];

For i:=n-1 downto 1 do
  begin
    For j:=i+1 to n do   b[i]:=b[i]-a[i,j]*Y[j];
    Y[i]:=b[i]/a[i,i];
  end;

  For i:=1 to n do
   begin
     writeln('Proqramin neticesi:')
     writeln('Y[',i,'] = ',Y[i]:1:3)
```

```
  end;
  Readln;
End.
```

Proqramin neticesi:

Y[1] = -0.357

Y[2] = -2.199

Y[3] = -6.975

Y[4] = -2.575

Y[5] = 3.596

Y[6] = 4.814

Y[7] = -5.298

Y[8] = 4.207

Y[9] = 3.495

Y[10] = 0.420

Referat.

Məlumdur ki, bir çox riyazi və fiziki məsələlər sinqulyar inteqral tənliklərə gətirilir. Lakin məlum olduğu kimi inteqral tənliklərin dəqiq həllini bir çox hallarda tapmaq mümkün olmadığından, onların təqribi həllinin tapılması məsələsinə baxılır.

Buraxılış işi

$$a(t)\cdot Y(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Y(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t)$$

kimi sinqulyar inteqral tənliyinə həsr olunmuşdur, burada *a(t), b(t)* və *f(t)* funksiyaları Hölder sinfinə daxil olan verilən funksiyalar, *Y(t)* isə axtarılan funksiyadır.

Buraxılış işində əvvəlcə sinqulyar inteqral tənliklər haqqında bəzi əsas məlumatlar verilmişdir və ortoqonal çoxhədlilərin əsas xassələri qeyd olunmuşdur. Sonra isə baxılan inteqral tənliyinin təqribi həllinin qurulması üçün kvadratur metodunun ümumi sxemi və bu sxemin əsaslandırılması verilmişdir. İşin sonunda isə “Turbo Pascal 7.0” alqoritmik dilində təklif olunan həll sxeminə uyğun proqram tərtib edilmişdir və hesabatlar aparılmışdır.

Abstract.

It is known that some mathematical and physical problems are bring to singular integral equations. But we know that to find exact solution of the integral equations in some circumstances not possible. That is why we consider the problem of finding approximate solution of the equations .

Graduation work have been devoted to the singular integral equation as like this

$$a(t)\cdot Y(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Y(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t)$$

Here functions *a(t), b(t)* and *f(t)* are the functions entered the Holder class, *Y(t)* function looked for.

In the graduation work at first have been given some basic information about singular integral equations and have been marked basic properties of the ortogonal polynominals. Then have been given general scheme of the quadrature method for finding approximate solution of the integral equation and considered grounding of this scheme. At the end of the work have given listing and results of the compiled program in the “Turbo Pascal 7.0” algorithmic language.