AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ

BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

TƏTBİQİ RİYAZİYYAT VƏ KİBERNETİKA FAKÜLTƏSİ

Bakalavr pilləsi üzrə

"Tətbiqi Riyaziyyat" ixtisası

a/b 396 saylı qrupun tələbəsi

Həsənova Gülsüm Qadir qızının

‹‹ Pirsonun χ^2 kriterisi ››

m ö v z u s u n d a

B U R A X I L I Ş İ Ş İ

Elmi rəhbər : dosent, f.r.e.n. Əhmədova H.

Kafedra müdiri : prof., f.r.e.d. Hacıyev A.

BAKI - 2012

Mündəricat

Giriş

Riyazi statistika praktikanın tələblərindən yaranan və tətbiqi xarakter daşıyan bir elmdir. Bu gün elə bir sahə yoxdur ki, orada riyazi statistika metodlarından istifadə olunmasın. Tibb, ekologiya, maliyyə, bank işi, sosiologiya, texnika və digər sahələrdə bu gün riyazi statistika metodlarından geniş istifadə olunur. Son illər kompyuterlərdən istifadə edib riyazi statistika metodları vasitəsilə müxtəlif sahələrdə qarşıya çıxan mühüm məsələlərin həllinə nail olmaq mümkün oldu. Riyazi statistikaya əsaslanan yeni yaranmış elm sahələri – kompyuterli statistika, stoxastik maliyyə riyaziyyatı və digər yeni elm sahələri bu gün cəmiyyətin inkişafında böyük rol oynayır. Ona görə də riyazi statistika tətbiqi sahədə aparıcı bir elmə çevrilmişdir. Riyazi statistikanın ehtimal nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi müxtəlif hallarda müxtəlif xarakter daşıyır.

Ehtimal nəzəriyyəsi kütləvi hadisə və ya prosesləri deyil, təsadüfi hadisə və ya prosesləri, məhz «ehtimali-təsadüfi» hadisə və ya prosesləri, yəni elələrini öyrənir ki, onlara uyğun ehtimal paylanmaları haqqında danışmaq məna kəsb etsin. Bununla belə, ehtimal nəzəriyyəsi, ixtiyari təbiətli, ehtimali-təsadüfi kateqoriyaya aid olmayan belə, kütləvi hadisə və ya proseslərin statistik öyrənilməsində müəyyən rol oynayır. Bu – ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan *seçim metodu* nəzəriyyəsi və ölçmə xətaları nəzəriyyəsi vasitəsilə həyata keçirilir. Bu hallarda ehtimal qanunlarına öyrənilən hadisə və ya proseslərin özləri deyil, onları araşdırma üsulları tabe olur.

Ehtimal nəzəriyyəsi ehtimalı hadisələrin statistik araşdırılmalarında ən mühüm rol oynayır. Burada Riyazi statistikanın ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan: ehtimali hipotezlərin statistik yoxlanılması nəzəriyyəsi, ehtimal paylanmalarının və bunlara daxil olan parametrlərin statistik qiymətləndirilməsi nəzəriyyəsi və s. kimi bölmələri tam mənası ilə tətbiqini tapa bilirlər. Bu daha dərin statistik metodların tətbiq oblastı olduqca dardır, çünki burada tələb olunur ki, öyrənilən hadisə və ya proseslərin özləri kifayət qədər müəyyən ehtimal qanunauyğunluqlarına tabe olsunlar.

Ehtimal qanunauyğunluqları böyük ədədlər qanunu əsasında statistik ifadə oluna bilinir.

I Fəsil.Təsadüfi kəmiyyət və onun paylanma funksiyası

1.1 Bəzi əsas anlayışlar

Təsadüfi kəmiyyətlər elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş funksiyalardır. $(\Omega, \mathsf{F}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası olsun: Burada Ω, – elementar hadisələr fəzası, F – Ω-ın boş olmayan bütün alt çoxluqlarından təşkil olunmuş σ-cəbr, $\mathbf{P}$ – F -də təyin olunmuş ehtimaldır.

Ω – elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş və x-in bütün həqiqi qiymətlərində

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathsf{F},$$

$$x \in (-\infty, +\infty) \qquad (1)$$

şərtini ödəyən ixtiyari $\xi = \xi(\omega)$ həqiqi funkiyasına *təsadüfi kəmiyyət* deyilir.

$$F_{\xi}(x) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}, \quad x \in (-\infty, +\infty) \qquad (2)$$

funksiyasına $\xi(\omega)$ *təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası* deyilir.

Təsadüfi kəmiyyətlərin diskret, mütləq kəsilməz kimi növləri ehtimsl nəzəriyyəsi və riyazi statistikada ən çox istifadə və tətbiq olunurlar.

Tərif: $(\Omega, \mathsf{F}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzasında verilmiş sonlu, yaxud hesabi qiymətlər alan $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinə *diskret təsadüfi kəmiyyət* deyilir.

Əgər $\xi(\omega)$ funksiyası $(\Omega, \mathsf{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ həqiqi qiymətlər alan diskret təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda n-in hər bir qiymətində

$$\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = x_n\} = p_n \tag{3}$$

ehtimalı təyin olunmuşdur.

(3) ehtimallar toplusu $\xi(\omega)$ *diskret təsadüfi kəmiyyətinin paylanması* adlanır.

$\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = x_n\} = p_n, \ n = 1, 2, \ldots$ ehtimallarını təyin etmək üçün verilən ixtiyari bir qayda diskret $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin *paylanma qanunu* adlanır. Paylanma qanunu hər hansı bir düsturla verilə bilər. Bu halda p_n ehtimalları $\xi(\omega)$-nın x_n qiymətini alması üçün müəyyən olunmuş bir düstur vasitəsilə ifadə olunur. $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin ala biləcəyi bütün müxtəlif qiymətləri və uyğun olaraq hər bir qiyməti alması ehtimalları cədvəl şəklində verilə bilər:

$\xi(\omega)$ -nın mümkün qiymətləri	x_1	x_2	...	x_n	...
$\mathbf{P}\{\xi(\omega) = x_i\}$	p_1	p_2	...	p_n	...

Bu cədvəl $\xi(\omega)$ *diskret təsadüfi kəmiyyətinin ehtimallarının paylanma cədvəli* adlanır.

Qeyd edək ki, $p_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$.

1.2 Təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasının əsas xassələri

$(\Omega, \mathrm{F}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\xi(\omega)$ – bu fəzada verilmiş təsadüfi kəmiyyət olsun.

$$F(x) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}, \quad x \in (-\infty, +\infty) \tag{1}$$

bərabərliyi ilə təyin edilən $F(x)$ paylanma funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır.

***1⁰**. $F(x)$ x -ə görə azalmayan funksiyadır.*

2⁰.Əgər $a<b$ olarsa,

$$\mathbf{P}\{\omega{:}a \le \xi(\omega) < b\} = F(b) - F(a) . \tag{2}$$

3⁰. $$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 ; \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 . \tag{3}$$

4⁰. $F(x)$ soldan kəsilməzdir.

5⁰. $\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \le x\} = F(x+0)$.

6⁰. $\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = x\} = F(x+0) - F(x)$.

İxtiyari paylanma funksiyasının paylanma funksiyası olması haqqında A.N.Kolmoqorov aşağıdakı teoremi isbat etmişdir.

Teorem. *$F(x)$ aşağıdakı xassələrə malik funksiya olsun:*

***1)** $F(x)$ $(-\infty,+\infty)$ -da azalmayandır ;*

***2)** $F(x)$ soldan kəsilməzdir ;*

3) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Onda elə ($\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}$) ehtimal fəzası və bu fəzada təyin oluna bilinən $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti vardır ki, $\xi(\omega)$ -nın paylanma funksiyası $F(x)$ -ə bərabərdir.

1.3 Òÿñàäöôè êÿìèééÿòèí ïàéëàíàñûíûí ñûõëûüû

$F(x)$ - $\xi(\omega)$ тясадцфи кямиййятинин пайланма функсийасы олсун. Яýÿð $\xi(\omega)$ тясадцфи кямиййятинин пайланма функсийасы x -èí áöòöí ãèéìÿòëÿðèíäÿ ($x \in (-\infty,+\infty)$)

êÿñèëìÿçàèðñÿ, ïîóí верилмèш áèð ãèéìÿòи àëìàñû åùòèìàëû ñûôûðäûð.

Ëàêèí åêñïåðèìåíòäÿ ìöøàùèäÿ îëóíà áèëÿí åëÿ òÿñàäöôè ùàäèñÿëÿð âàðäûð êè, îíëàðûí åùòèìàëû ñûôûðäûð; òÿñàäöôè ùàäèñÿíèí åùòèìàëû ñûôûð îëàрса, ïîóí ãåéðè-ìöìêöí ùàäèñÿ îëдуьуну вя йа ващид оларса, ïîóí éÿãèí ùàäèñÿ îëдуьуну щюкм етмяк сящв оларды.

Гейд едяк êè, ãåéðè-ìöìêöí ùàäèñÿíèí ещтималы ùÿìèøÿ ñûôðà, éÿãèí ùàäèñÿíèí ещтималы ùÿìèøÿ âàùèäÿ áÿðàáÿðäèð.

Яўÿð α ядяди $\xi(\omega)$ òÿñàäöôè êÿìèééÿòèíèí пайланма функсийасынын кясилмязлик нюгтясидирся, $\{\omega : \xi(\omega) = \alpha\}$ ìöìêöí îëà áèëÿí ùàäèñÿäèð, лакин

$$\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = \alpha\} = 0 .$$

Доьрудан да, ихтийари $\varepsilon > 0$ цчцн

$$\mathbf{P}\{\omega : \alpha \le \xi(\omega) < \alpha + \varepsilon\} = F(\alpha + \varepsilon) - F(\alpha)$$

бярабярлийиндян

$$\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = \alpha\} = \lim_{\varepsilon \to 0} [F(\alpha + \varepsilon) - F(\alpha) =$$

.

Бу мцлащизяляримиздян беля нятиъя алыныр ки, пайланма функсийасы кясилмяз олан тясадцфи кямиййятин щяр бир айрыъа гиймяти алма ещтималы сыфыр олдуьундан, ону ала биляъяйи гиймятлярин ещтималлары иля характеризя етмяк мцмкцн дейилдир.

Бу нюгтейи-нязярдян, ядяд охунун нюгтялярини кичик ($x, x+\Delta x$) èíòåðâàëлары иля явяз едиб, $\xi(\omega)$ òÿñàäöôè êÿìèééÿòèíèí ($x, x+\Delta x$) èíòåðâàëûíäàí ãèéìÿò àëìà åùòèìàëû – $\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \in [x, x + \Delta x)\}$ -ны Δx -ÿ áþëÿê, тясадцфи кямиййятин мцяййян характеристикасыны àëìалыйыг.

Яэяр

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{P}\{\omega : x \le \xi(\omega) < x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

(1)

варса, онда бу лимитя $\xi(\omega)$ *òÿñàäöôè êÿìèééÿòèíèí ïàéëàíìàñûíûí ñûõëûã ôóíêñèéàñû* äåéèëèð*;* бу функсийа $p(x)$ èëÿ èøàðÿ îëóíóð.

(6) ифадясинин ñóðÿòèíäÿêè åùòèìàëû (3) äöñòóðó èëÿ èôàäÿ åòñÿê,

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

(2)

äöñòóðóíó àëûðыã.

Áåëÿëèêëÿ, ÿýÿð $F(x)$ дифференсиалланандырса, òÿñàäöôè êÿìèééÿòèí ïàéëàíìàñûíûí ñûõëûã ôóíêñèéàñû îíóí ïàéëàíìà ôóíêñèéàñûíûí x-я эюря òþðÿìÿñèíÿ áÿðàáÿðäèð.

Tərif. $\xi(\omega)$ – ïàéëàíìà ôóíêñèéàñû $F(x)$ îëàí òÿñàäöôè êÿìèééÿò îëñóí*.* x-èí бцтцн ãèéìÿòлярèíäÿ ($-\infty < x < +\infty$)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\, du \qquad (3)$$

áÿðàáÿðëèéèíè þäÿéÿí èíòåãðàëëàíàí $p(u)$ *Бîðåë* ôóíêñèéàñû âàðñà, онда áó ôóíêñèéàéà $\xi(\omega)$ *òÿñàäöôè êÿìèééÿòèíèí ïàéëàíìàñûíûí ñûõëûã ôóíêñèéàñû äåéèëèð.*

Ïàéëàíìàñûíûí ñûõëûã ôóíêñèéàñû îëàí òÿñàäöôè êÿìèééÿòëÿð *"мцтляг êÿñèëìÿç" òÿñàäöôè êÿìèééÿòëÿð* àäëàíûð.

Àéäûíäûð êè, $\xi(\omega)$ мцтляг êÿñèëìÿç òÿñàäöôè êÿìèééÿò îëàðñà, èõòèéàðè $x \in (-\infty, +\infty)$ ö÷öí

$\mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) = x\} = 0$; $x < y$ øÿðòèíè þäÿéÿí ихтийари x, y-ëÿð ö÷öí

$$\mathbf{P}\{\omega: x \le \xi(\omega) \le y\} = \mathbf{P}\{\omega: x < \xi(\omega) < y\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\omega: x \le \xi(\omega) < y\} = \mathbf{P}\{\omega: x < \xi(\omega) \le y\}$$

áÿðàáÿðëèêëÿðè þäÿíèлиð. Лакин бу бярабярликлярля ифадя олунан мцнасибятляря ясасян $\xi(\omega)$-нын мцтляг êÿñèëìÿç òÿñàäöôè êÿìèééÿò олдуьуну щюкм етмяк олмаз.

Рийази анализ курсундан мялумдур ки, $p(u)$ êÿñèëìÿç ôóíêñèéà îëàðñà, (3) áÿðàáÿðëèéè èëÿ òÿéèí îëóíàí $F(x)$ ôóíêñèéàñû äèôôåðåíñèàëëàíàíäûð âÿ $F'(x) = p(x)$. $F(x)$ àçàëìàéàí ôóíêñèéà îëäóüóíäàí $F'(x) \ge 0$, éÿíè $p(u)$ ìÿíôè îëìàéàí ôóíêñèéàäûð ($p(u) \ge 0$). Ôìóìè ùàëäà, (3) áÿðàáÿðëèéèíäÿí àéäûíäûð êè, $F'(x) = p(x)$ áÿðàáÿðëèéè Ëåáåã þë÷öñö ìÿíàäà ñàíêè ùÿð éåðäÿ þäÿíèлиð.

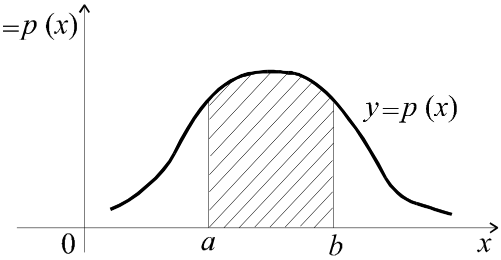
ßýÿð ξ òÿñàäöôè êÿìèééÿòèíèí ïàéëàíìàñûíûí ñûõëûã ôóíêñèéàñû âàðñà, онда

$$\mathbf{P}\{\omega: a \le \xi(\omega) < b\} = \int_a^b p(u)\, du. \tag{4}$$

Dîüðóäàн да

$$\mathbf{P}\{\omega: a \le \xi(\omega) < b\} = F(b) - F(a). \tag{5}$$

(5) вя (3) áÿðàáÿðëèклярindян иси (4) бярабярлийи алыныр.



Шякил 1

ξ òÿñàäöôè êÿìèééÿòèíè $[a,b)$ ïàð÷àñûíäàí ãèéìÿòëÿð àëìà åùòèìàëû øÿêèë 1-äÿ øòðèõëÿíìèø ñàùÿнин юлчцсцня бярабярдир. $p(x)$ пайланманын êÿñèëìÿç сыхлыг ôóíêñèéàсы îëàðñà, (4) áÿðàáÿðëèèéíÿ ясасян

$$\mathbf{P}\{\omega : x \leq \xi(\omega) < x + \Delta x\} = p(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

олдуьу алыныр.

(3) áÿðàáÿðëèèéíäÿ $F(+\infty) = 1$ îëäóüóíó íÿçÿðÿ àëñàã,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(u)\, du = 1 \tag{6}$$

îëäóüó àëûíûð.

Éóõàðûäà äåäèêëÿðèìèçè éåêóíëàøäûðàðàã, áèð äàùà ãåéä åäÿê êè, ξ òÿñàäöôè êÿìèééÿòèíèí ïàéëàíìàсыíûí ñûõëûã ôóíêñèéàñû $p(x)$ – (6) áÿðàáÿðëèèéíè þäÿéÿí, ìÿíôè îëìàéàí ôóíêñèéàäûð âÿ ÿêñèíÿ, (6) áÿðàáÿðëèèéíè þäÿéÿí, ìÿíôè îëìàéàí èõòèéàðè $p(x)$ ôóíêñèéàñû ìöÿééÿí áèð òÿñàäöôè êÿìèééÿòèí ïàéëàíìàñûíûí ñûõëûã ôóíêñèéàñûäûð.

1.4 Normal paylanma funksiyaları

Təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası bütün ədəd oxunda, paylanma funksiyasının birinci tərtib törəməsi isə ixtiyari sonlu intervalın sonlu sayda nöqtəsindən başqa bütün nöqtələrdə (ola bilər ki, bütün nöqtələrdə) kəsilməz olarsa, bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası *mütləq kəsilməz paylanma funksiyasıdır.*

Təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasının xasssələrindən belə nəticəyə gəlmək olar ki, guya paylanma funksiyasının kəsilməz olduğu bütün nöqtələrdə onun törəməsi də olmalıdır.

Mütləq kəsilməz paylanma funksiyalar ailəsindən norma paylanma funksiyasına baxaq:

Normal paylanma. Paylanmasının sıxlıq funksiyası

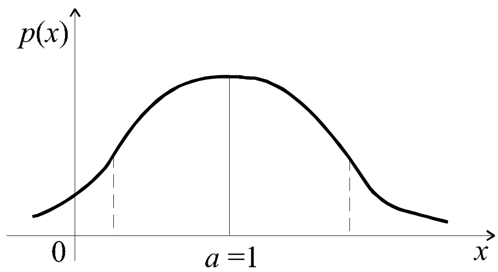
$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty) \tag{1}$$

olan təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası (a, σ) parametrli normal paylanma funksiyası adlanır.

Aydındır ki,

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du, \quad x \in (-\infty,+\infty) . \tag{2}$$

(2) düsturu ilə verilən $F(x)$ paylanma funksiyası a və σ parametrlərindən asılıdır. Əgər $a=0$, $\sigma=1$ olarsa, normal paylanma qanunu *standart paylanma qanunu* adlanır. Paylanmanın sıxlıq funksiyası $p(x)$ -in qrafiki $a=1$, $\sigma=2$ şəkil 1-də verilmişdir.



Şəkil 2

$p(x)$ funksiyasının qrafiki Qauss əyrisi adlanır; normal paylanma qanunu Qauss paylanması adı ilə də məlumdur. Bu funksiyanı ($p(x)$ -i) tədqiq edək:

1) $p(x)$ bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur;

2) $p(x)$ funksiyası x -in bütün qiymətlərində müsbətdir, yəni Qauss əyrisi absis oxundan yuxarıdadır;

3) $\lim\limits_{|x|\to\infty} p(x) = 0$, yəni absis oxu Qauss əyrisinin üfüqi asimptotudur;

4) (1) düsturundan

$$p'(x) = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

olduğu aydındır.

Əgər $x < a$ olarsa, $p'(x) > 0$,

$x = a$ olarsa, $p'(x) = 0$,

$x > a$ olarsa, $p'(x) < 0$.

Deməli, $x = a$ qiymətində $p(x)$ özünün $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$-yə bərabər olan maksimal qiymətini alır.

5) $p(x)$-in ikinci tərtib törəməsini hesablayaq:

$$p''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left[1-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right].$$

Aydındır ki, $x = a+\sigma$ və $x = a-\sigma$ qiymətlərində $p''(x)$ sıfra bərabərdir. Bu nöqtələrdən keçərkən o, öz işarəsini dəyişir (bu nöqtələrdə funksiyanın qiyməti $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$-yə bərabərdir). Beləliklə,

$$\left(a-\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right) \text{ və } \left(a+\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$$

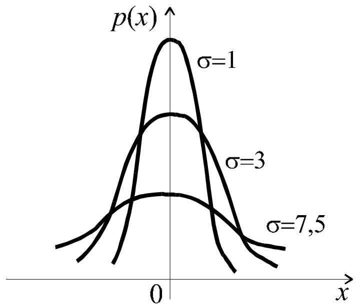
nöqtələri Qauss əyrisinin əyilmə nöqtələridir.

6) $x-a$ fərqi $p(x)$-in analitik ifadəsində ((1) düsturu) kvadratı ilə verildiyindən $p(x)$-in qrafiki $x = a$ düz xəttinə görə simmetrikdir.

7) a parametri dəyişdikdə Qauss əyrisinin forması dəyişmir, o, yalnız absis oxu boyunca sürüşür: əgər a artarsa, əyri sağa, a azalarsa, Qauss əyrisi formasını dəyişməyərək "paralel" olaraq sola sürüşür.

σ parametri dəyişdikdə, qrafikdə baş verən dəyişiklikliyi araşdıraq.

Paylanmanın sıxlıq funksiyasının maksimum nöqtəsinin $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ olduğunu yuxarıda qeyd etdik. Deməli, σ artdıqca Qauss əyrisinin ordinatı azalır və əyri absis oxuna doğru sıxılır; σ azaldıqca isə əyri sanki “hündürləşərək” ordinat oxu istiqamətində yuxarıya doğru (müsbət istiqamətdə) “dartılır” (şəkil 3).



Şəkil 3

Qeyd edək ki, a və σ parametrlərinin ixtiyari qiymətlərində normal əyri ilə absis oxu arasındakı sahə vahidə bərabərdir, belə ki,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1 .$$

Normal paylanma qanununun mühüm əhəmiyyəti vardır, belə ki, kifayət qədər çox sayda təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanma qanunu müəyyən şərtlər nəzərə alındıqda normal qanuna yaxınlaşır.

II Fəsil.Təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları

2.1 Riyazi gözləmə

Tərif 1. $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti $x_1, x_2, \cdots$ qiymətlərini uyğun olaraq $p_1, p_2, \cdots$ ehtimalları ilə alırsa və $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k$ sırası mütləq yığılandırsa,

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot P\{\omega : \xi(\omega) = x_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k \qquad (1)$$

ədədinə d*iskret* ξ *təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi* deyilir. Buradan aydındır ki, $M|\xi| < +\infty$ olarsa, diskret təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi vardır.

Tərif 2. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x)$-dirsə və

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, dF(x) < +\infty$$

olarsa,

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x) \qquad (2)$$

bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqrala ξ *təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi deyilir* (bərabərliyin sağ tərəfindəki inteqral Stiltyes inteqralıdır).

Tərif 3. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x)$-dirsə və

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, p(x) \, dx < +\infty$$

olarsa,

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, p(x) \, dx \qquad (3)$$

bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqrala ξ *təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi* deyilir.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi –

$$\int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbf{P}(d\omega)$$

Lebeq inteqralı varsa,

$$\mathbf{M}\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega). \tag{4}$$

bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqrala deyilir.

$A_1, \ldots, A_m$ hadisələri Ω-nın bölgüsünü təşkil edirsə, yəni $i \neq j$ olduqda, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\sum_{i=1}^{m} A_i = \Omega$ olarsa və $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot I_{A_i}(\omega)$$

kimi ifadə olunarsa, ξ-yə sadə təsadüfi kəmiyyət deyilir; x_i-lər ξ təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi mümkün qiymətlərdir.

Sadə təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{P}(A_i)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

2.2. Riyazi gözləmənin xassələri

Riyazi gözləmənin əsas xassələri ilə tanış olaq.

1^0. *Sabitin riyazi gözləməsi sabitin özünə bərabərdir, yəni* c *sabitdirsə,* $\mathbf{M}c = c$.

2^0. *Sabiti riyazi gözləmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar, yəni* ξ *– təsadüfi kəmiyyət və* c *– sabitdirsə, onda*

$$\mathbf{M}(c \cdot \xi) = c \cdot \mathbf{M}\xi. \tag{1}$$

3^0. *ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələri vardırsa, $\xi+\eta$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi vardır və cəmin riyazi gözləməsi toplanan təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləmələrinin cəminə bərabərdir:*

$$\mathbf{M}(\xi+\eta)=\mathbf{M}\xi+\mathbf{M}\eta \,. \tag{2}$$

Qeyd edək ki, 3^0 xassəsi təsadüfi kəmiyyətlərin biri diskret, digəri kəsilməz olduqda da doğrudur.

N ə t i c ə . *Riyazi gözləmələri olan, sonlu sayda təsadüfi kəmiyyətlər cəminin riyazi gözləməsi vardır və cəmin riyazi gözləməsi toplanan təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləmələrinin cəminə bərabərdir:*

$$\mathbf{M}(\xi_1+...+\xi_n)=\mathbf{M}\xi_1+...+\mathbf{M}\xi_n \,. \tag{3}$$

Ümumi halda 2^0 və 3^0 xassələrini aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$\mathbf{M}(c_1\xi_1+c_2\xi_2+...+c_n\xi_n)=$$
$$=c_1\mathbf{M}\xi_1+c_2\mathbf{M}\xi_3+...+c_n\mathbf{M}\xi_n \,. \tag{4}$$

4^0. *Riyazi gözləmənin multiplikativlik xassəsi.*

T e o r e m 1 . Riyazi gözləmələrə malik ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin hasilinin riyazi gözləməsi vardır və hasilin riyazi gözləməsi bu təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləmələri hasilinə bərabərdir:

$$\mathbf{M}(\xi, \eta) = \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta \,. \tag{5}$$

Ümumi halda riyazi gözləmənin multiplikativlik xassəsi aşağıdakı kimi ifadə olunur.

T e o r e m 2 . $\xi_1,\dots,\xi_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələri vardırsa ($\mathbf{M}\,|\xi_k|<+\infty$), onda $\xi_1\cdot\dots\cdot\xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələri vardırsa və

$$\mathbf{M}(\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_n) = \mathbf{M}\xi_1 \cdot \mathbf{M}\xi_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{M}\xi_n = \prod_{k=1}^{n}$$

(6)

Nəticə. ξ_i -lər eyni qanunla paylanmış asılı olmayan və riyazi gözləmələri olan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda

$$\mathbf{M}(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n) = (\mathbf{M}\xi_1)^n .$$

(7)

5⁰. Əgər $a \le \xi \le b$ olarsa, onda $a \le \mathbf{M}\xi \le b$ doğrudur. $\mathbf{M}\xi \le \mathbf{M}|\xi|$ bərabərsizliyi həmişə doğrudur.

6⁰. $I_A(\omega)$ – A hadisəsinin indikatorudur, yəni

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A; \\ 0, \omega \overline{\in} A. \end{cases}$$

Onda

$$\mathbf{M}I_A(\omega) = 1 \cdot \mathbf{P}(A) + 0 \cdot \mathbf{P}(\overline{A}) = \mathbf{P}(A),$$

yəni

$$\mathbf{M}I_A(\omega) = \mathbf{P}(A).$$

(8)

7⁰. Əgər ixtiyari $\omega \in \Omega$ üçün $\xi(\omega) \ge \eta(\omega)$ olarsa, onda

$$\mathbf{M}\xi \ge \mathbf{M}\eta . \quad (9)$$

8⁰. **Çebışov bərabərsizliyi.** $\xi = \xi(\omega)$ – mənfi olmayan təsadüfi kəmiyyət və $a > 0$ olarsa, onda

$$\mathbf{P}\{\xi \ge a\} \le \frac{1}{a}\mathbf{M}\xi .$$

(10)

(11) – *Çebışov bərabərsizliyi* adlanır.

Teorem. $g(x)$ mənfi olmayan və ξ-nin qiymətlər çoxluğunda azalmayan funksiyadırsa və $\mathbf{M}\,|g(\xi)| < +\infty$ olarsa, onda ixtiyari $a > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{\xi(\omega) > a\} \leq \frac{\mathbf{M}g(\xi)}{g(a)} . \qquad (11)$$

Normal paylanma qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi. (a, σ) parametrli normal paylanma qanunu ilə paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

olduğundan, (7) düsturuna əsasən

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

Bərabərliyin sağ tərəfində $z = \dfrac{x-a}{\sigma}$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$\mathbf{M}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + a)\, e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2} dz =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2} dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int$$

.

Belə ki, $z \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2}$ tək funksiya olduğundan $\int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2} dz = 0$.

$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2}$ funksiyası (0,1) parametrli normal paylanma qanununun sıxlıq funksiyası olduğundan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2} dz = 1 .$$

Beləliklə, (a, σ) parametrli normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi a parametrinə bərabərdir.

2.3 Təsadüfi kəmiyyətlərin momentləri. Dispersiya

Tərif. k-nın mənfi olmayan tam qiymətləri üçün ξ^k təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi vardırsa, yəni $\mathbf{M}|\xi|^k < +\infty$ olarsa, $\mathbf{M}\xi^k$ kəmiyyətinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin k tərtib momenti, $\mathbf{M}|\xi|^k$ kəmiyyətinə ξ*-nin* k *tərtib mütləq moment*i deyilir. $(\xi-\mathbf{M}\xi)$ təsadüfi kəmiyyətinin momentləri *mərkəz momentlər* adlanır. Təsadüfi kəmiyyətin ən çox istifadə olunan ədədi xarakteristikalarından biri də təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası adlanan – təsadüfi kəmiyyətin ikinci tərtib mərkəzi momentidir.

Dispersiyanı $\mathbf{D}\xi$ ilə işarə etsək, tərifə görə

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)^2.$$

Qeyd edək ki, dispersiya təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətlərinin onun riyazi gözləməsi ətrafında nə dərəcədə sıx səpələnməsini xarakterizə edir.

Diskret ξ təsadüfi kəmiyyətinin $x_1, x_2, \ldots$ qiymətlərini $\mathbf{P}\{\xi = x_k\} = p_k$, $k = 1,2,\ldots$ ehtimalları ilə alırsa, $(\sum_k p_k = 1)$, onun dispersiyası

$$\mathbf{D}\xi = \sum_k (x_k - \mathbf{M}\xi)^2 p_k = \sum_k x_k^2 p_k - \left(\sum_k x_k p_k\right)^2 \tag{1}$$

düsturu; paylanma funksiyası $F(x)$ olan ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası

$$\mathbf{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mathbf{M}\xi)^2\, dF(x) \tag{2}$$

düsturu; mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası

$$\mathbf{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mathbf{M}\xi)^2\, p(x)\,dx \tag{3}$$

düsturu ilə hesablanır; burada $p(x)$ – ξ-nin paylanmasının sıxlıq funksiyasıdır.

$(\xi-\mathbf{M}\xi)^2$ mənfi olmadığından $\mathbf{D}\xi$ həmişə təyin olunmuşdur və $\mathbf{D}\xi = +\infty$ da ola bilər.

Riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə edərək, dispersiyanın başqa bir ifadəsini də almaq olar:

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 . \tag{4}$$

Dispersiya və momentlərin bəzi xassələri ilə tanış olaq.

1⁰. Əgər $\mathbf{D}\xi$ sonludursa, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2} \tag{5}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

2⁰. $\mathbf{D}\xi = 0$ olarsa, onda $\mathbf{P}\{\xi = \mathbf{M}\xi\} = 1$.

3⁰. İxtiyari ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası mənfi deyildir: $\mathbf{D}\xi \geq 0$.

4⁰.Əgər c ixtiyari sabitdirsə, onda

$$\mathbf{D}(c \cdot \xi) = c^2 \mathbf{D}\xi , \qquad \mathbf{D}(\xi + c) = \mathbf{D}\xi .$$

5⁰. ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$\mathbf{D}(\xi \pm \eta) = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta .$$

Teorem. Əgər $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sonlu dispersiyalara malik, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$\mathbf{D}\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\xi_k \tag{6}$$

bərabərliyi doğrudur.

6⁰. $\mathbf{M}\xi^2 = \mathbf{D}\xi + (\mathbf{M}\xi)^2$,

$$|\mathbf{M}\xi| \leq \sqrt{\mathbf{M}\xi^2} ,$$

$$\mathbf{D}\xi \leq \mathbf{M}\xi^2 .$$

Normal paylanmanın mərkəzi momentləri. (a,σ) parametrli normal qanunla paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x)$ olsun.

Təsadüfi kəmiyyətin ikinci tərtib mərkəzi moment dispersiya olduğundan, normal paylanma qanununun dispersiyası aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - a)^2 = \sigma^2 .$$

Beləliklə, (a,σ) parametrli normal paylanma qanunundakı σ parametri bu qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin kvadratik orta yayınmasıdır. Qeyd edək ki, (a,σ) parametrli normal paylanma qanunu $a = \mathbf{M}\xi$ və $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi$ parametrləri tamamilə təyin olunur.

2.4 Kovariasiya

Eyni ehtimal fəzasında verilmiş ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri arasında ola bilər ki, funksional və ya qeyri-funksional asılılıq olsun; lakin ola da bilər ki, onlar bir-birindən asılı olmasın. Bu kəmiyyətlər arasındakı asılılığı kəmiyyətcə xarakterizə etmək üçün kovariasiya adlanan ədədi xarakteristikadan istifadə olunur.

T ə r i f . ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələri uyğun olaraq $\mathbf{M}\xi$ və $\mathbf{M}\eta$ olsun ($\mathbf{M}\xi$ və $\mathbf{M}\eta$ -nın varlığı fərz olunur). ξ və η *təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyası (yaxud korrelyasiya momenti)* $\mathbf{M}\left((\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)\right)$ ədədinə deyilir və $\operatorname{cov}(\xi;\eta)$ kimi işarə olunur:

$$\operatorname{cov}(\xi;\eta) = \mathbf{M}\left((\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)\right). \tag{1}$$

Riyazi gözləmənin tərifindən istifadə etsək, (1) bərabərliyindən aşağıdakı düstur alınır:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbf{M}(\xi\cdot\eta) - \mathbf{M}\xi\cdot\mathbf{M}\eta . \tag{2}$$

(2) düsturundan aydındır ki, ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə,

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0 .$$

Aydındır ki,

$$\mathbf{cov}(\xi;\xi)=\mathbf{D}\xi .$$

ξ və η ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Onda

$$\mathbf{D}(\xi\pm\eta)=\mathbf{M}((\xi-\mathbf{M}\xi)^2+$$

$$+(\eta-\mathbf{M}\eta)^2\pm2\mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)(\eta-\mathbf{M}\eta))$$

olduğundan,

$$\mathbf{D}(\xi\pm\eta)=\mathbf{D}\xi+\mathbf{D}\eta\pm2$$

. (3)

Qeyd edək ki, ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, $(\xi-\mathbf{M}\xi)$ və $(\eta-\mathbf{M}\eta)$ da asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu halda $\mathbf{M}(\xi\cdot\eta)=\mathbf{M}\xi\cdot\mathbf{M}\eta$ olduğundan, $\mathrm{cov}\,(\xi;\eta)=0$.

Lakin ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyası sıfır olarsa, onların asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğunu hökm etmək olmaz!

Qeyd edək ki, kovariasiya ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin asılılıq xarakteristikasıdır.

2.5 Ehtimal paylanmalarının forma və yerləşmə xarakteristikaları

Təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün qiymətləri müəyyən bir sabit ətrafında qruplaşarsa, bu sabit onun yerləşmə xarakteristikasını ifadə edir. Riyazi gözləmə belə ədədi xarakteristikalardandır. Təsadüfi kəmiyyətin ədəd oxu üzərində yerləşmə xarakteristikalarından ən çox istifadə olunan *moda* və *median* ilə tanış olaq.

Tərif. ξ kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyasının maksimum qiymətini aldığı nöqtəyə *onun modası* deyilir; *əgər moda yeganədirsə*, ξ-nin paylanması *unimodal*, əks halda – *multimodal paylanma* adlanır.

ξ diskret təsadüfi kəmiyyətdirsə və $\mathbf{P}\{\xi=x_i\}=p_i$, $\sum\limits_i p_i=1$ olarsa, ξ-nin modası x_i-lərin qiymətlərindən elələridir ki, onlar üçün

$$\mathbf{P}\{\xi = x_i\} = \max_i p_i$$

bərabərliyi ödənilir.

ξ diskret təsadüfi kəmiyyətinin modasını x_M ilə işarə etsək, onda

$$\mathrm{P}\{\xi = x_M\} \geq \mathrm{P}\{\xi = x_i\} = p_i, \quad i = 1,2,...$$

bərabərsizliyi doğrudur.

T ə r i f .

$$F(x) = \mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) < x\}, \qquad x \in (-\infty,$$

$\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası olsun. x arqumentinin

$$F(x) \leq 0{,}5 \leq F(x+0), \quad x \in (-\infty, +\infty) \qquad (1)$$

bərabərsizlikləri ilə təyin olunan qiymətinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin (və ya $F(x)$ paylanma funksiyasının) medianı deyilir.

$F(x)$ mütləq kəsilməz paylanma funksiyası olarsa, heç olmazsa elə bir x qiyməti vardır ki, x -in bu qiymətində $F(x) = 0{,}5$ bərabərliyi ödənilir.

Qeyd edək ki, ixtiyari paylanmanın heç olmazsa bir medianı vardır; lakin riyazi gözləmə barədə bunu söyləmək olmaz.

Diskret ξ təsadüfi kəmiyyəti üçün (1) bərabərsizliyi analoji olaraq

$$\sum_{i<x} p_i \leq 0{,}5 \leq \sum_{i \leq x} p_i$$

bərabərsizlikləri ilə ifadə olunur; burada

$$p_i = \mathbf{P}\{\xi = x_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots; \quad \sum_i p_i = 1.$$

(a, σ) parametrli normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin modası a -ya, medianı – $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\xi}$ -yə bərabərdir.

Tərif. ξ təsadüfi kəmiyyətinin birinci, ikinci, üçüncü və dördüncü tərtib momentləri vardırsa və sonludursa,

$$As = \frac{M(\xi - M\xi)^3}{\sqrt{D\xi^3}}$$

kəmiyyətinə *asimmetriya əmsalı*;

$$Es = \frac{M(\xi - M\xi)^4}{(D\xi)^2} - 3$$

kəmiyyətinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının *eksses əmsalı* deyilir. Bu kəmiyyət ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x)$-in standart normal paylanma funksiyasından fərqlənməsini xarakterizə edir. Aydındır ki, təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu hər hansı $x = a$ nöqtəsinə görə simmetrikdirsə, onda təsadüfi kəmiyyətin üçüncü tərtib mərkəzi momenti (ümumiyyətlə, bütün tək tərtib mərkəzi momentlər) sıfra bərabər olur. Odur ki, əgər üçüncü tərtib mərkəzi moment sıfırdan fərqli olarsa, paylanma qanunu simmetrik ola bilməz. Ona görə də paylanma qanununun asimmetriyasını xarakterizə etmək üçün üçüncü tərtib mərkəzi momentdən istifadə olunur. Standart normal paylanma qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin eksses və asimmetriya əmsalları sıfra bərabərdir.

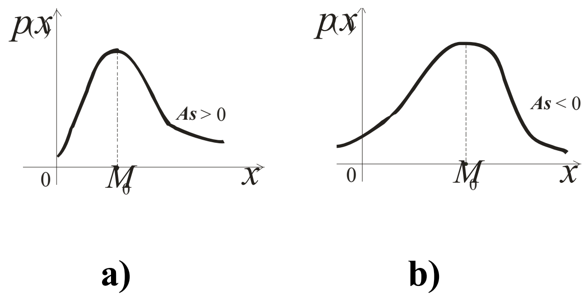
r-in tam qiymətlər aldığını fərz edirik. Bu paylanmanın asimmetriya və eksses əmsalları asanlıqla hesablanan aşağıdakı düsturlarla ifadə olunur:

$$As = \frac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}}; \quad Es = \frac{6}{r} + \frac{p^2}{r(r-p)}$$

.

Ümumiyyətlə, normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin paylanmasından fərqlənən paylanmaları tədqiq edərkən, bu fərqlənməni kəmiyyətcə xarakterizə edən xüsusi ədədi xarakteristikalardan istifadə olunur.Məhz bu hallarda paylanmanın assimmetriya və eksses xarakteristikaları əvəzolunmazdır. Standart normal paylanma qanunu üçün bu xarakteristikalar sıfırdır. Ona görə də, əgər tədqiq olunan paylanmanın asimmetriya əmsalı və ekssesi çox da böyük deyilsə, bu halda onun paylanmasının standart normal paylanmaya yaxın olduğunu söyləmək olar. Əksinə, asimmetriya əmsalı və ekssesin böyük qiymətləri – onun standart normal paylanmadan kifayər qədər fərqlənməsinə dəlalət edir.

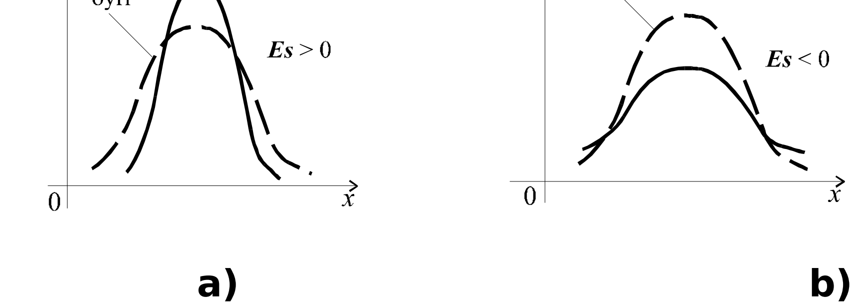
Qeyd edək ki, əgər təsadüfi kəmiyyətin paylanma əyrisinin “uzun hissəsi” onun riyazi gözləməsindən sağdadırsa, asimmetriya müsbətdir: $As > 0$ (şəkil 4, *a*); əgər “uzun hissə” riyazi gözləmədən soldadırsa, asimmetriya mənfidir, yəni $As < 0$ (şəkil 4, *b*). M_0 – moda nöqtəsidir.



Şəkil 4

Asimmetriyanın işarəsi modaya nəzərən təyin olunur: əgər əyrinin “uzun hissə”si modadan sağdadırsa asimmetriya müsbət, soldadırsa mənfi götürülür.

Standart normal paylanmanın ekssesi sıfırdır. Ona görə də, əgər hər hansı bir paylanmanın ekssesi sıfırdan fərqlidirsə, onda bu paylanma standart normal paylanmadan fərqlidir; əgər eksses müsbətdirsə, tədqiq olunan paylanma əyrisinin hündürlüyü normal əyridən çoxdur (şəkil 5, *a*); əgər eksses mənfidirsə, tədqiq olunan paylanma əyrisinin hündürlüyü normal əyridən azdır (şəkil 5, *b*).



Şəkil 5

III Fəsil. χ^2 paylanması. Pirson kriteriyası

3.1 Ðèéàçè ñòатистиканын бяçè ясас мясяляляри

Ясас анлайышлар. Рийази статистика експериментал мялуматлара эюря мцяййян нятиъялярин ясасландырылмагла тяйин едилмяси кими мясялялярин тядгиги иля мяшьул олур.

Щяр щансы бир ещтимал моделиня ясасланараг, бу моделя уйьун мцшащидя олуна биляъяк щадисялярин ещтималларыны тяйин етмяк вя с. ещтимал нязяриййясинин тядгигат мясяляляриндян олдуьу щалда, рийази статистикада тякрарланан асылы олмайан експериментляр нятиъясиндя алынмыш мялуматлар ясасында (бу мялуматлар адятян, ядяди характер дашыйыр) тясадцфи кямиййятин статистик пайланма ганунуну, онун параметрляринин статистик гиймятлярини тяйин етмяк, îíëàðûí ãèéìÿòëÿíäèðèëìÿñè вя с. кими мясяляляр арашдырылыр. Биз рийази статистиканын бəçè ÿñàñ âÿ ñàäÿ ìÿñÿëÿëÿðèíè шярщ етмякля кифайятляняъяйик.

Фярз едяк ки, арашдырылан ξ тясадцфи кямиййятинин пайланма гануну намялумдур. Бу тясадцфи кямиййятин пайланма ганунуну тяйин етмяк цчцн мцшащидяляр апарылыр. Бу мцшащидялярдя алынмыш мялуматлар ясасында тясадцфи кямиййятин мцяййян бир пайланма гануну иля пайланмасы щипотези иряли сцрцлцр: мясялян, тясадцфи кямиййят нормал ганунла пайланмышдыр. Бу щалда биз, пайланма гануну щаггында щипотезин статистик йохланылмасы мясяляси иля гаршылашырыг. *Рийази статистиканын ясас мясяляляриндян бири – щипотезлярин статистик йохланылмасы мясялясидир.* Арашдырылан ξ тясадцфи кямиййятинин ала биляъяйи бцтцн гиймятляр чохлуьуна *цмуми чохлуг* демяйи шяртляшяк. Нятиъяляри асылы олмайан n сайда апарылмыш мцшащидялярдя ξ *тясадцфи кямиййяти цчцн мцшащидя олунмуш* $x_1,\ldots,x_n$ *гиймятляр топлусуна* n *щяъмли сечим, щяр бир сынаг нятиъясиндя алынмыш щяр бир* x_i *(*i *– сынаьын нюмрясидир) гиймятиня* ξ *тясадцфи кямиййятинин мцмкцн гиймяти дейилир.* Àéäûíäûð êè, ихтийари ñå÷èìèí åëåìåíòëÿðè öìóìè чохлуьун елементляриндян олаъагдыр. $x_1,\ldots,x_n$ гиймятляри асылы олмайан $\xi_1,\ldots,\xi_n$ тясадцфи кямиййятляринин уйьун олараг $1,2,\ldots,n$ -ъи сынагда алдыглары гиймятлярдир. Гейд едяк ки, n сайда апарылмыш йени, асылы олмайан сынаглар серийасында $\xi_1,\ldots,\xi_n$-лярин уйьун олараг алдыьы $x_1',\ldots,x_n'$ гиймятляри арасында онлардан тякрар олараг тясадцф едилянляр ола биляр. n щяъмли сечимдяки $x_1,\ldots,x_n$ гиймятляриня *сечими гиймятляр* дейилир. Гейд етмяк лазымдыр ки, n щяъмли бир вя йа бир нечя сечим ясасында чыхарылан нятиъяляр цмуми чохлуÿó елми ясасларла характеризя етмяйя имкан верир.

Беляликля, ξ_i тясадцфи кямиййяти i-ъи сынагда (ихтийари n щяъмли сынаглар серийасында) мцшащидя олуна билян тясадцфи кямиййятдир вя ξ_i-лярин ($i=\overline{1,n}$) пайланма ганунлары ξ тясадцфи кямиййятинин пайланма гануну иля ейнидир; йяíè i-нин ихтийари гиймятиндя

$$\mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}\{\xi_i < x\} = F(x).$$

Компонентляри ейни ганунла пайланмыш тясадцфи ξ_i кямиййятляри олан $\zeta=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ âåêòîðó *сечим фязасы* адланан R^n-дян гиймятляр алыр. ζ-йа *сечим вектору* демяйи шяртляшяк. Гейд едяк ки, яэяр $\xi_1,\ldots,\xi_n$-ляр ейни ганунла пайланмыш асылы олмайан тясадцфи кямиййятляр (йахуд векторлар) оларса, $\zeta=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ цмуми чохлугда тяйин олунмуш n щяъмли сечим векторудур вя бу щалда $(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$ n щяъмли сечим олуб, асылы олмайан n сайда сынаьын реализасийасы кими интерпретасийа олунур.

Апарылан мцшащидялярдя алынмыш $x_1,\ldots,x_n$ нятиъяляриня ясасян арашдырылан тясадцфи кямиййятин пайланмасынын намялум параметрляринин мцяййян мяíàäà тяйин едилмяси типли мясяляляр рийази статистиканын ясас мювзуларындан бири олуб, *намялум параметрлярин гиймятляндирилмяси мясяляляри* адланыр.

Намялум θ параметринин гиймятляндирилмяси мясяляси

$$\theta \approx h(\xi_1,\ldots,\xi_n)$$

тягриби дцстурларынын тяйин олунмасындан ибарятдир. R^n ñå÷èì ôÿçàсында тяйин олунмуш, адятян, мцяййян бир сонлуюлчцлц R^s фязасынын Θ чохлуьундан гиймятляр алан $h(\zeta)$ функсийасына R^n *ñå÷èì ôÿçàсында статистика*, $h(\zeta)$ цчцн $\theta \approx h(\zeta)$ тягриби бярабярлийиндян алынмыш гиймятя θ *параметринин статистик гиймяти* дейилир.

Щадисянин тезлийи, рийази эюзлямя, дисперсийа вя с. кими ядяди характеристикаларын сечим ясасында щесабланмыш статистик гиймятляри цмцми чохлуьу ìöÿééÿí ìÿ’íàäà характеризя етмяйя имкан верир.

Щяр щансы намялум a кямиййятини юлчмяк мягсядиля апарылмыш n сайда асылы олмайан сынагда $x_1,\ldots,x_n$ нятиъяляринин мцшащидя олундуьуну вя бу нятиъялярин ξ тясадцфи кямиййятинин алдыьы сечими гиймятляр олдуьуну шяртляшяк. Юлчмя заманы систематик хятайа йол верилмязся, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = a$ олдуьуну гябул етмяк олар.

Гейд едяк ки, експеримент нятиъясиндя мцшащидя олунан кямиййятин (a-нын) сечими гиймяти (x) иля онун щягиги гиймяти (a) арасындакы фярг (бу фярг *хята* адланыр вя $\Delta x = x - a$ кими ишаря олунур) йа сабит оларса вя йа щяр щансы бир ганuна-уйьунлугла дяйишярся (бу хяталарын баш вермяси сябяби мя’ёóì îëìàëûâûð), беля хяталарà *систематик хяталар* дейилир.

θ параметринин статистик гиймятини $\tilde{\theta}$ иля ишаря едяк. $\delta^2 = \mathbf{M}\,|\tilde{\theta} - \theta|^2$ *кямиййятиня* $\tilde{\theta}$ *статистик гиймятинин квадратик орта хятасы* дейилир. $\mathbf{M}\,\tilde{\theta} = \theta$ øÿðòèíèí þäÿнилìÿñè систематик хятанын олмадыьыны эюстярир.

Апарылмыш мцшащидялярдя алынмыш нятиъяляр ясасында тясадцфи кямиййятин пайланма ганунунун, онун параметрляринин статистик гиймятляринин тя’йин едилмяси вя онларын гиймятляндирилмяси кими мясяляляря чох тясадцф олунур. Тясадцфи кямиййятин пайланма ганунуну тяйин етмяк цчцн кифайят гядяр эениш статистик мялумат олмалыдыр. Айдындыр ки, статистик мялуматлар йалныз мцшащидяляр нятиъясиндя топланылыр. Гейд едяк ки, беля мцшащидялярин апарылмасы мцяййян хяръ тяляб етдийиндян вя бу да юзлцйцндя мцяййян чятинликляр йаратдыьындан, məhdud sayda aparılmış sınaqlar nəticəsində alınmış kifayət qədər çox olamayan məlumat ясасында беля, тясадцфи кямиййятин пайланма гануну щаггында мцяййян мцлащизяляр йцрцтмяк мцмкцндцр. Тясадцфи кямиййятин ясас ядяди характеристикаларыны, мясялян, рийази эюзлямя, дисперсийа, бязян дя йцксяк тяртиб моментляри вя с.müəyyən mənada тяйин етмяк олур.

Тясадцфи кямиййятин пайланма ганунунун нювц мялум олдуьу щалда статистик мяëóìàòëàð ясасында онун параметрляринин тяйин олунмасы типли мясяляляря дя чох тясадцф олунур. Мясялян, тясадцфи кямиййятин нормал ганунла пайландыьы яввялъядян мялум оларса, мящдуд сайлы сынаглар нятиъясиндя алынмыш мялуматлар ясасында нормал пайланма ганунунун a вя σ параметрляринин тяéèí åäèëìÿñè бу типли мясялялярдяндир. Бязян дя еля мясяляляря тясадцф олунур ки, пайланма ганунунун нювц ящямиййят кясб етмир; йалныз тясадцфи кямиййятин ядяди характеристикаларынын тяéèí åäèëìÿñè тяляб олунур. Бу нюгтейи-нязярдян, тясадцфи кямиййятлярин експериментал тядгиги мцщцм ящямиййятя маликдир.

Mühümlük ölçüsü – *statistik hipotezlərin yoxlanılması* məsələsinin standart qoyuluşunda kriterinin ölçüsünü yuxarıdan məhdudlaşdıran müsbət ədəddir (və ya, ekvivalent olaraq, 1-ci növ səhvin ehtimalıdır). Mühümlük ölçüsü cədvəllərinin tərtibatında: 0,1; 0,05; 0,01 və s. tipli standart qiymətlərdən biri götürülür. Müşahidələrin verilmiş həjmində Mühümlük ölçüsünün azalması, kriterinin «həssaslığının» azalması hesabına 1-ci növ səhvin ehtimalının azalmasına səbəb olur (2-ci növ səhvin ehtimalının artmasına). Buna görə də, real məsələlərdə mühümlük ölçüsünün seçilməsi 1-ci və 2-ci növ səhvlərin praktiki cəhətdən təsirlərini nəzərə alan məzmunlu mülahizələrə əsaslanır.

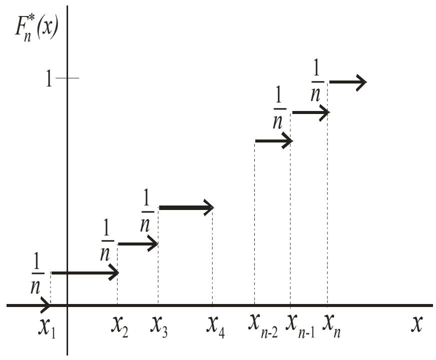
3.2 Емпирик пайланма

ξ арашдырылан ихтийари тясадцфи кямиййятдирся, експериментал мяëóìàòëàð ўñàñûíäà $\{\xi < x\}$ тясадцфи щадисясинин баш вериб-вермямяси щаггында мцлащизя йцрцтмяк олар; x верилмиш бир ядяддир вя $x \in (-\infty;+\infty)$. Ещтималын статистик тяðèôèíÿ ўñàñÿí $\{\xi < x\}$ тясадцфи щадисясинин тезлийини бу щадисянин ещтималы кими гябул етсяк,

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} \approx \frac{k_n(x)}{n} = F_n^*(x),\ x \in (-\quad \infty \tag{1}$$

мцнасибятляриля тяйин олунан $F_n^*(x)$ функсийасыны $F(x)$ нязяри пайланма функсийасы цчцн *statistik qiymət* кими эютцрмяк тябиидир. (1) мцнасибятиндяки $k_n(x)$ кямиййяти n сайда апарылан сынагда $x_k < x$ шярти юдянилян k-ларын сайы ($k = 1, 2, \ldots, n$), x_k – ξ-нин k-ъы сынагда алдыьы гиймятдир. (1) мцнасибятиля тяéèí îëóíàí $F_n^*(x)$ функсийасына ξ *тясадцфи кямиййятинин емпирик пайланма функсийасы* дейилир.

Фярз едяк ки, n сайда апарылмыш сынагда ξ тясадцфи кямиййяти цчцн $x_1, x_2, \ldots, x_n$ гиймятляри алынмышдыр; гейд едяк ки, $x_1, \ldots, x_n$ – гиймятляри еля нюмрялянмишдир ки, $x_i < x_{i+1}$ (шякил 40). Айдындыр ки, $x_k < x \le x_{k+1}$ шяртини юдяйян ихтийари x цчцн $\xi < x$ бярабярсизлийи юдянилян сынагларын сайы k-йа бярабяр олаъагдыр. Беляликля, $x_k < x \le x_{k+1}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) олдугда емпирик пайланма функсийасы



Шякил 5

$$F_n^*(x) = \frac{k}{n} \tag{2}$$

бярабярлийи иля тяйин олунур; $\frac{k}{n}$ кямиййяти $\{\xi < x\}$ щадисясинин тезлийидир. n сайда асылы олмайан сынагда n-ин кифайят гядяр бюйцк гиймятляри цчцн $\{\xi < x\}$ тясадцфи щадисясинин тезлийинин бу щадисянин статистик ещтималы олараг эютцрцлмясиня ясасланараг, емпирик пайланма функсийасынын x нюгтясиндяки гиймяти кими $\{\xi < x\}$ щадисясинин тезлийи цчцн алынмыш

$$F_{\xi}(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} \approx F_n{}^{*}(x) = \frac{k}{n}$$

статистик гиймят эютцрцлцр.

Гейд едяк ки, емпирик пайланма функсийасынын бу цсулла тяйин олунмасындан практикада аз истифадя олунур. Беля ки, $F_n^*(x)$ щямишя пилляvары функсийадыр, $F(x)$ ися бцтцн ядяд охунда кясилмя нюгтяси олмайан функсийа да ола биляр. Лакин бунунла беля, n-ин кифайят гядяр бюйцк гиймятлярини эютцрдцкъя емпирик пайланма функсийасы $F_n^*(x)$-ин кясилмя нюгтяляриндяки артымларынын гиймятляри кичилдийиндян $\frac{k}{n} = \frac{k_n(x)}{n}$ тезлийи $\mathbf{P}\{\xi < x\} = F(x)$ пайланма функсийасына санки щяр йердя чох йахын олур. Диэяр тяряфдян, Бернулли схеми цчцн эцъляндирилмиш бюйцк ядядляр ганунуна ясасян $n \to \infty$ олдугда $F_n^*(x)$ емпирик пайланма функсийасы x-ин щяр бир гейд олунмуш гиймятиндя $F(x)$ нязяри пайланма функсийасына ващид ещтималла йыьылыр, йяни

$$\mathrm{P}\{F_n^*(x) \to F(x)\} = 1.$$

Гливенко-Êàíòåëëè теореми. ***$n \to \infty$ олдугда $F_n^*(x)$ емпирик пайланма функсийасы $F(x)$ нязяри пайланма функсийасына ващид ещтималла йыьылыр:***

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty<x<+\infty} |F_n^*(x) - F(x)| = 0\right\} =$$

.

n-ин бюйцк гиймятляриндя $F(x) \approx F_n^*(x)$ мцнасибятинин дягиглийини гиймятляндирмяк цчцн А.Н.Колмогоровун рийази статистикада мцщцм ящямиййяти олан ашаьыдакы лимит теоремindян истифадя олунур:

Колмогоров теореми. $F(x)$ ***кясилмяз пайланма функсийасыдырса, онда***

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sqrt{n}\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|F_n^*(x)-F(x)\right|<z\right\}=$$

$$=K(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{-2n^2z^2},\ z>0,$$

бурада $K(z)$ – Колмогоров пайланмасыдыр.

Бу теоремя ясасланараг $F_n^*(x)$ емпирик пайланма функсийасыны $F(x)$ нязяри пайланма функсийасы цчцн $\frac{1}{\sqrt{n}}$ тяртибля гядяр дягигликля статистик гиймят кими эютцрмяк олар. $F_n^*(x)$ емпирик пайланма функсийасынын $F(x)$ нязяри пайланма функсийасындан фяргляnmя юлчцсцнц гиймятляндирмяк мягсядиля А.Н.Колмогоровун

$$\widetilde{\mathbf{D}}_n=\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|F_n^*(x)-F(x)\right|$$

статистикасындан истифадя етмяк олар.

Гейд едяк ки, $\widetilde{\mathbf{D}}_n$ тясадцфи кямиййятинин пайланмасы тядгиг олунан кясилмяз пайланма функсийасы $F(x)$-дян асылы дейилдир. $\widetilde{\mathbf{D}}_n$-ляри щесабламаг о гядяр дя чятин дейилдир. Беля ки, емпирик пайланма функсийасы иля нязяри кясилмяз пайланма функсийасы арасындакы максимал фярг олан нюгтяляр $F_n^*(x)$-èí ñû÷ðàéûø íþãòÿëÿридир. Одур ки, $x_m<x_{m+1}$, $m=1,\dots,n-1$ олдугда $\widetilde{\mathbf{D}}_n$ статистикасы ашаьыдакы мцнасибятлярля тя’éèí îëóíóð:

$$\widetilde{\mathbf{D}}_n=\max_{1\le m\le n}\left\{\left|\frac{m-1}{n}-F^*(x_m)\right|,\ \left|\frac{m}{n}-\right.\right.$$

вя йа

$$\widetilde{\mathbf{D}}_n = \max_{1\le m\le n}\left\{ \left| \frac{2m-1}{2n} - F^*(x_m) \right| + \frac{1}{2n} \right\}$$

.

Гейд едяк ки, емпирик пайланма функсийасы пайланма функсийасынын бцтцн хассяляриня маликдир. Доьрудан да, $F_n^*(x)$ монотон азалмайан солдан кясилмяз функсийадыр; $x \le x_1$ олдугда ихтийари x цчцн $\xi < x$ бярабярсизлийи юдянилян сынагларын сайы сыфра, $x > x_n$ олдугда $\xi < x$ бярабярсизлийи юдянилян сынагларын сайы n-я бярабяр олур; $x_k < x \le x_{k+1}$ олдугда ися $F_n^*(x) = \frac{k}{n}$ бярабярлийи иял тя'йин едилдийиндян,

$$F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ \frac{k}{n}, & k=1, ..., n-1,\ x_k < x \le x_{k+1}, \\ 1, & x > x_n. \end{cases} \tag{3}$$

Айдындыр ки, ξ тясадцфи кямиййятинин емпирик пайланма функсийасы ядяд охунун x_1-дян солда йерляшян ($x_1 < x_2 < ...< x_n$) бцтцн нюгтяляриндя сыфра, x_n-дян саьда йерляшян бцтцн нюгтяляриндя ващидя бярабярдир. Гейд едяк ки, емпирик пайланма функсийасынын гоншу сычрайыш нюгтяляриндя ($x_1 < x_2 < ...< x_n$) алдыьы артым $\frac{1}{n}$-я бярабярдир. Яэяр сынаглар нятиъясиндя алынмыш $x_1, x_2, ..., x_n$ нятиъяляриндян ℓ сайдасы ($\ell < n$) тякрар олунурса (мясялян, x^* гиймяти ℓ дяфя тякрар îëóíàðñà), бу щалда тякрарланан гиймят – x^* нюгтясиндян гоншу нюгтяйя кечиддя емпирик пайланма функсийасынын алдыьы артым $\frac{\ell}{n}$-я бярабяр олур. Апарылан сынаглар серийасында бу гайда иля тя'йин олунан емпирик пайланма функсийасы тясадцфи кямиййяти тамамиля характеризя едир.

3.3 Щипотезлярин йохланылмасы. Узлашма критериляри

Тясадцфи кямиййяти там мянасы иля характеризя едян пайланма функсийасынын юнъядян мялум олмадыьы щалларда онун емпирик мялуматлар ясасында тяйин едилмяси мясяляляриня чох тясадцф олунур. Яэяр тясадцфи кямиййятин пайланма функсийасы мяёóì îëìàçñà, ёàêèí îíóí ïàéëàíìà ãàíóíóíóí íþâö (ону L гануну адландыраг) щаггында щяр щансы бир мцлащизя йцрцтмяйя мцяййян ясаслар оларса, онда тясадцфи кямиййятин L гануну иля пайландыьыны фярз едяряк (Н щипотези), бу щипотезин алынмыш статистик мяёóìàòëàðëà óçëàøìàñûíûí éîõëàíûëìàñû; ïàéëàíìà ãàíóíóíóí íàìÿëóì ïàðàìåòðèíин щямин параметрин мцмкцн ола билян гиймятляри чохлуьу Θ-нын алтчохлуьу олан $\Theta^* \subset \Theta$ чохлуьундан олмасы цчцн сечилмиш щипотез иля експериментлярин реал нятиъяляриндян алынмыш статистик гиймятлярин бир-бириля узлашма критериляринин тяéèí åдилмяси; ики щипотездян биринин сечилмяси вя с. кими мясяляляр рийази статистиканын ясас мясяляляриндяндир.

Тясадцфи кямиййятин пайланма ганунуна вя йа онун пайланмасынын параметрляриня аид олан щипотезляря *статистик щипотезляр* дейилир.

Гябул едилмиш статистик щипотезля експериментлярин реал нятиъяляринин фактики уйьунлуьуну йохламаг цчцн хцсуси олараг сечилмиш *uzlaşma kriterilərindən* истифадя олунур.

Мцшащидя олунан щадисялярин тезликляри иля бу щадисялярин сечилмиш щипотезля узлашан щесабланмыш ещтималларынын фярглянмялярини характеризя едян мцяййян бир кямиййят сечилир. Бу кямиййят мцшащидяляр ясасында алынмыш нятиъялярин функсийасы олуб *статистика* адланыр. Щипотезлярин йохланылмасы цчцн *seçilmiş* статистикайа (адятян, бунлар мянфи гиймятляр алмыр) *критери* дейилир.

Апарылмыш мцшащидялярдя алынмыш нятиъялярин гябул едилян щипотезля узлашмасыны йохламаг цчцн истифадя олунан узлашма критериляри бу щипотезин гябул едилиб-едилмямясиня ясас верир.

Üмуми щалда щипотезин статистик йохланылмасы мясяляси иля таныш олаг. $f(\xi,\theta)$ – ξ тясадцфи кямиййятинин θ параметриндян асылы пайланма гануну; Θ – намяёóì ïàðàìåòðèí ìöìêöí îëà биляí ãèéìÿòëÿð ÷îõëóüó, Θ^* ися Θ-нын алтчохлуьу олсун ($\Theta^* \subset \Theta$). Намяёóì θ параметринин Θ^* чохлуьундан олмасыны ($\theta \in \Theta^*$) йохламаг цчцн гябул едилмиш щипотезя *илкин щипотез* (вя йа *ясас щипотез*) дейилир; бу щипотез H_0 иля ишаря олунур; θ параметринин $\Theta \backslash \Theta^*$ чохлуьундан олмасы щипотезиня H_0 *щи-потезиня* (илкин щипотезя) *алтернатив щипотез* dåéèëèð; бу щипотез H_1 иля ишаря едилир.

Θ^* чохлуьу йалныз бир параметрдян ибарят оларса, $\theta \in \Theta^*$ олдуьуну йохламаг цчцн сечилмиш H_0 щипотези *садя щипотез*, Θ^* чохлуьунда параметрлярин сайы бирдян чох оларса, H_0 – *мцряккяб щипотез* адланыр.

Щипотезин йохланылмасы ашаьыдакы гайдада апарылыр. Щипотезя уйьун сечилмиш B фязасы эютцрцлцр вя бу фяза бир-бириля кясишмяйян B_0 вя B_1 алтфязаларына бюлцнцр. Яэяр мцшащидялярин нятиъяси $(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in B_0$ оларса, сечилмиш H_0 щипотези статистик гиймятлярля тясдиг олунур, йя'ни H_0 щипотези гябул олунур; яэяр $(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in B_1$ оларса, сечилмиш H_0 щипотезинин мцшащидялярин нятиъяляри иля узлашмадыьы айдын олур; бу щалда H_0 щипотези гябул олунмур.

B_0 чохлуьуна H_0 щипотезинин *гябул олунма чохлуьу*, B_1-я ися H_0 щипотези цчцн *критик чохлуг (область)* дейилир. Бу нюгтейи-нязярдян B_1 чохлуьуна бязян H_0 *щипотезинин критериси* дя дейилир.

Тябиидир ки, ики щипотездян бирини сечяркян, мясялян, H_0 щипотезинин гябул олунмасы, H_1 щипотезинин инкар олунмасыдыр.

n сайда бир-бириндян асылы олмайан мцшащидяляр ясасында ξ тясадцфи кямиййяти цчцн алынмыш n щяъмли сечим (мясялян, $x_1,...,x_n$) ясасында H_1 алтернатив щипотези нязяря алынмагла H_0 илкин щипотезинин ($\theta \in \Theta^*$) фактики нятиъялярля узлашмасыны йохлама мясялясинин щяллиндя критик чохлуьун сечилмясиндя мцяййян шяртляря риайят олунмалыдыр. Критик чохлуьун сечилмяси цчцн шяртляр У.Нейман вя Е.Пирсон тяряфиндян арашдырылмышдыр.

Критик чохлуг тяйин едиляркян нязяря алынмалыдыр ки, H_0 щипотезинин сечилиб-сечилмямясиндя ики нюв сящвя йол вериля биляр.

Birinci növ səhvdə – илкин H_0 щипотези щягигятян доьру щипотез олмасына бахмайараг, сящвян сечилмир вя H_1 щипотези сечилир.

İkinci növ səhvdə – H_1 щипотези доьру олдуьу щалда, сящвян H_0 щипотези сечилир.

Бу щаллар ъядвял шяклиндя ашаьыда иллцстрасийа олунмушдур:

H_0	Доьрудур	Доьру дейил

щипотези		
сечилмир	1-ъи нюв сящв	щипотез дцзэцн сечилмишдир
сечилир	щипотез дцзэцн сечилмишдир	2-ъи нюв сящв

Беляликля, биринъи вя икинъи нюв сящвлярин ещтималларыны B_1 критик чохлуьунун сечилмяси иля тяйин етмяк олар.

Арашдырылан кямиййят цчцн мцшащидя олунан нятиъядян асылы олараг, бу вя йа диэяр щипотезин сечилиб-сечилмямясини мцяййян ещтималларла характеризя етмяк олар. *Яэяр мцшащидя олунан кямиййят x гиймятини алмышдырса вя илкин H_0 щипотези сечилмямишдирся, H_1 щипотезинин сечилмясинин шярти (x гиймятинин мцшащидя олундуьу шярт кими эютцрцлцр) ещтималына "критик" ещтимал дейилир.*

Бу ещтималы $\pi(x)$ иля ишаря едяк:

$$\pi(x) = \mathbf{P}\{H_1 / x\}$$

вя бир даща гейд едяк ки, $\pi(x)$ *мцшащидя олунан кямиййятин x гиймятини алмасы шяртиля H_1 щипотезинин сечилмяси ещтималыдыр.*

Birinci növ səhvin ehtimalını α иля ишаря едяк. Онда

$$\alpha = P\{H_1 / H_0\}$$

ещтималы – доьру олан *ilkin* H_0 *hipotezinin deyil*, H_1-ин *seçilməsi ehtimalıdır*; α – *критеринин мщщцмлцк юлчцсц* адланыр.

Яэяр алтернатив щипотез доьрудурса, мцшащидя олунан фактики нятиъялярля бу щипотезя уйьун нятиъяляр узлашырса вя бу щалда илкин H_0 щипотези сящвян сечилмишдирся, икинъи нюв сящвя йол верилмишдир. İкинъи нюв сящвин ещтималыны β иля ишаря едяк. Онда

$$\beta = P\{H_0 / H_1\},$$

$1-\beta$ *критеринин эцъц* адланыр.

Критеринин мщщцмлцк юлчцсцнцн p-йя бярабяр олмасы, ещтималы p-дян кичик олан щадисялярин *bir eksperimentdə* демяк олар ки, мцшащидя олунмайаъаьы кими баша дцшцлмялидир. Адятян, критеринин мщщцмлцк юлчцсц юнъядян сечилир (мясялян, $\alpha = 0{,}05$; $\alpha = 0{,}01$). Бу щалда критеринин эцъцнцн максимал эютцрцлмясиня наил олмаг лазымдыр, чцнки критеринин эцъцнцн максимал олмасы, икинъи нюв сящвин ещтималы β-нын минимал олмасына сябяб олур.

3.4 χ^2 (xi-kvadrat) uzlaşma kriterisi

Statistikada paylanma qanunlarına aid hipotezlərin yoxlanılmasında ən geniş tətbiq olunan χ^2 kriterisidir.

ξ tədqiq olunan təsadüfi kəmiyyət olsun. Bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununun $F(x)$ olduğunu (H_0 hipotezi) fərz edək. H_0 hipotezinin doğru seçilib-seçilməməsini yoxlayaq. Bu hipotezi yoxlamaq üçün n sayda bir-birindən asılı olmayan müşahidələr aparılır və alınmış nəticələr əsasında tədqiq olunan kəmiyyətin empirik paylanma funksiyası $F_n^*(x)$ tə'yin olunur. $F_n^*(x)$ empirik paylanma funksiyası ilə nəzəri paylanma funksiyasının müqayisə edilməsi üçün xüsusi olaraq seçilmiş təsadüfi kəmiyyətlər – uzlaşma kriteriləri vardır. Bunlardan Pirsonun χ^2, Kolmoqorov (lambda kriterisi), Smirnov, Romanovski, Yastremskoy və s. kriterilərini misal gətirmək olar.

Pirsonun χ^2 kriterisi ilə tanış olaq. ξ-nin ala biləcəyi qiymətlər oblastını k sayda cüt-cüt kəsişməyən $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k$ intervallarına bölək və hər bir Δ_i intervalında ξ-nin aldığı qiymətlərin sayını müəyyənləşdirək. $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyasının məlum olduğunu fərz etsək, ξ təsadüfi kəmiyyətinin Δ_i intervalından qiymətlər alması ehtimalı $\mathbf{P}\{\xi \in \Delta_i\} = p_i$-ni həmişə hesablamaq mümkündür; bu halda ξ-nin aldığı qiymətlərdən Δ_i intervalındakılarının nəzəri sayı np_i, empirik sayı isə m_i olacaqdır. Dediklərimiz aşağıdakı cədvəldə verilir:

Δ_i – i-ci interval	Δ_1	Δ_2	. . .	Δ_i	. . .	Δ_k
m_i – empirik say	m_1	m_2	. . .	m_i	. . .	m_k
np_i – nəzəri say	np_1	np_2	. . .	np_i	. . .	np_k

Burada m_i kəmiyyəti n sayda aparılmış sınaqlarda ξ üçün müşahidə olunmuş qiymətlərdən Δ_i intervalından olanların sayıdır və $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$; $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$.

Əgər empirik tezliklər nəzəri tezliklərdən xeyli fərqlənirsə, H_0 hipotezi qəbul edilmir, əks halda – hipotez qəbul edilir.

Əgər yoxlanılan H_0 hipotezi doğru seçilmişdirsə, m_i təsadüfi kəmiyyəti riyazi gözləməsi np_i, dispersiyası isə $np_i\ (1 - p_i)$ olan binomial qanunla paylanmışdır. Onda $n \to \infty$ olduqda

$$y_i = \frac{(m_i - np_i)}{\sqrt{np_iq_i}}, \quad q_i = 1 - p_i$$

təsadüfi kəmiyyəti riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası vahid olan normal qanunla paylanmışdır ((0; 1) parametrli normal qanunla).

Qeyd edək ki, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – xətti asılı təsadüfi kəmiyyətlərdir. Doğrudan da,

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \sqrt{np_iq_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i - np_i}{\sqrt{np_iq_i}} \sqrt{np_iq_i} = \sum_{i=1}^{k} (m_i - np_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} m_i - n \sum_{i=1}^{k} p_i = n - n = 0.$$

Riyazi statistikaya aid bir çox ədəbiyyatda isbat olunmuşdur ki, $n \to \infty$ olduqda

$$\sum_{i=1}^{k} y_i^2 q_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \qquad (1)$$

statistikası sərbəstlik dərəcəsi sayı $\nu = k - 1$ olan χ^2 paylanması ilə paylanmışdır. Beləliklə, $i = 1, 2, \ldots, k$ qiymətlərində m_i ilə np_i arasındakı fərqin ölçüsü kimi

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \qquad (2)$$

kriterisindən istifadə olunur.

χ^2 kriterisinin tətbiqi aşağıdakı qaydada aparılır:

1) χ^2 statistikası (2) düsturu ilə hesablanır;

2) mühümlük ölçüsü α seçilir;

3) χ^2 paylanması üçün tutulmuş cədvəldən $\chi^2_{\nu;\alpha}$ təyin olunur;

4) $\chi^2 > \chi^2_{\nu;\alpha}$ olarsa, H_0 qəbul edilmir, $\chi^2 \le \chi^2_{\nu;\alpha}$ olarsa, H_0 qəbul edilir.

χ^2 təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu məlum olarsa, mühümlük ölçüsünə (α-ya) əsasən irəli sürülmüş hipotezi yoxlamaq üçün mühümlük hüdudunu təyin etmək olur.

Qeyd edək ki, paylanma qanunu üçün irəli sürülmüş hipotezin yoxlanılmasında yalnız birinci növ səhvin olub-olmadığına nəzarət edilir.

Bir daha qeyd edək ki, (2) düsturu ilə verilmiş

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

statistikası yalnız $n \to \infty$ olduqda χ^2 paylanması ilə paylanmışdır və buna əsasən də bu kriteridən istifadə etmək istədikdə, hər bir intervalda ξ üçün müşahidə olunan seçimi qiymətlərin sayı ən azı 5–10 olmalıdır. Əgər bəzi intervallarda bu say kiçik olarsa, məsələn, 1–2 olarsa, onda onları birləşdirmək məqsədəuyğundur.

Misal: Metal pul 100 dəfə atılır, $n = 100$; gerb üzü 65 dəfə, şəbəkə üzü 35 dəfə düşmüşdür: $O_1 = 65,\ O_2 = 35$. $k = 2$. Əgər pul simmetrikdirsə $E_1 = 50$, $E_2 = 50$.

$$X^2_{Pearson} = \sum_i (O_i - E_i)^2 / E_i = (65-50)^2/50 + \\ + (35-50)^2/50 = 2\cdot 225/50 = 9$$

Alınmış bu qiyməti yəni $\xi_1 \geq 3$ və ya $\xi_1 \leq -3$ sınaqları seriyasında hər bir sınaqda p ehtimalı ilə baş verən hadisənin m dəfə baş verməsi tezliyini qiymətləndirmək üçün Muavr-Laplas düsturunu tətbiq etdikdə,

$$X^2_{k=1} = \sum_i (O_i - E_i)^2/E_i = (O_1 - E_1)^2/E_1 + (O_2 - E_2)^2/E_2 = \\ = \left((m - np)/\sqrt{npq}\right)^2 = \xi_1^2$$

olduğunu alırıq. $\xi_1 = (m - np)/\sqrt{npq}$, $\sqrt{npq} \geq 3$ olduqda riyazi gözləməsi 0, dispersiyası 1-ə bərabər $N(0,1)$ – standart normal qanunu ilə paylanır. Bu halda Pirson nəticəsi binomial paylanmanın approksimasiyasında alınan normal qanunla üst-üstə düşür.

Nəticə

Təqdim olunan iş dahi ingilis riyaziyyatçısı, müasir statistikanın atası sayılan Karl Pirsonun χ^2 – Pirson kriteriyasına həsr olunmuşdur. Bu, Karl Pirson 1900-cü ildə statistik modelin müşahidə nəticələri ilə uzlaşdığını yoxlamaq üçün sadə, universal və effektiv bir metod təklif etmişdir. Hipotezlərin yoxlanılması üçün tətbiq olunan bu metod – *Pirson* χ^2 *-kriterisi* (*xi-kvadrat kriterisi*) – ən mühüm və ən çox istifadə olunan statistik kriteri olub, müasir riyazi statistikanın fundamenti hesab olunur. χ^2 paylanması statistik hipotezlərin yoxlanması üçün ən geniş istifadə olunan paylanmalardan biridir. χ^2 paylanmasının əsasında ən güclü uyğunluq kriterilərindən χ^2 kriterisi qurulmuşdur. Uyğunluq kriterisi naməlum paylanma qanunu haqqında hipotezin yoxlanılması kriterisi adlanır.

χ^2 kriterisi müxtəlif paylanmaların hipotezlərinin yoxlanması üçün istifadə olunur. Onun üstünlüyü məhz bundadı.

Təqdim olunan işdə χ^2 kriterisinin istifadə ilə hipotezlərin yoxlanılması zamanı empirik (müşahidə olunan) və nəzəri (normal paylanma ilə hesablanmış) tezliklər müqayisə olunmuşdur. χ^2 kriterisi – tezliklərin paylanmasını normal qanunla paylanmasından asılı olmayaraq müqayisə etməyə imkan verir.

Tətbiqinə aid misal da verilmişdir.

Ədəbiyyat

1. **Əhmədova H. M.** Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. – Bakı: Gənclik, 2002.
2. **Əhmədova H. M.** Riyazi statistikanın elementləri. – Bakı: Maarif, 2000.
3. **Колмогоров А. Н.** Основы понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974.
4. **Крамер Г.** Математические методы статистики. – М.: ИЛ, 1948.
5. **Ширяев А. Н.** Вероятность. – М.: Наука, 1980.
6. **Хальд А.** Математическая статистика. – М.: ИЛ, 1956.
7. **C. E. Allahverdiyev, H. M. Əhmədova, A.H.Hacıyev** Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika ensiklopediyası – Bakı: Elm, 2010.
8. **Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М. И.** Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.