AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ

BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakultəsi

Əyani şöbəsinin IV kurs, 390-cı qrup tələbəsi

QƏRİBLİ SƏNAN İBRAHİM oğlu

Tətbiqi riyaziyyat bakalavr ixtisas dərəcəsi almaq

“**REQULYAR SƏRHƏD ŞƏRTLİ ŞTURM-LİUVİLL OPERATORUNUN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN TƏKRARLANMASI HAQQINDA**”

mövzusunda

BURAXILIŞ İŞİ

Kafedra müdiri: f.-r.e.d. prof. H.D.Orucov

Elmi rəhbər: f.-r.e.d. prof. İ.M.Nəbiyev

BAKI 2011

MÜNDƏRİCAT

səh.

Giriş

Aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \tag{1}$$

$$y(0) + \omega y(\pi) = 0,$$
$$\bar{\omega} y'(0) + \propto y(\pi) + y'(\pi) = 0, \tag{2}$$

burada $q(x) \in L_2\,[0,\pi]$ həqiqi funksiya, ω istənilən kompleks ədəd, $\propto$ isə ixtiyari həqiqi ədəddir.

Tərif. λ parametrinin (1), (2) məsələsinin trivial olmayan həllinin varlığını təmin edən qiymətlərinə bu məsələnin məxsusi ədədləri, uyğun həllərə isə məxsusi funksiyaları deyilir. Müəyyən λ_0 məxsusi ədədinə uyğun xətti asılı olmayan məxsusi funksiyaların sayına bu məxsusi ədədin təkrarlanma dərəcəsi deyilir.

Aydındır ki, $\omega = 0$ olduqda (2) sərhəd şərtləri ayrılan sərhəd şərtlərinə çevrilir. Bu halda (1), (2) məsələsinin məxsusi ədədlərinin sadə olması, yəni təkrarlanma dərəcəsinin 1-ə bərabər olması klassik faktdır (məs. bax: [1]).

$\omega \neq 0$ olduqda (2) şərtləri ayrılmayan sərhəd şərtləri olur. Periodik $(\omega = -1, \propto = 0)$ və antiperiodik $(\omega = 1, \propto = 0)$ sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanma meyarı [2] kitabında verilmişdir.

Bu buraxılış işində $\omega \neq 0$ olduqda (1), (2) məsələlərinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanması araşdırılmışdır. Eyni zamanda bu məsələnin xarakteristik funksiyasının sıfırlarının təkrarlanma meyarı da verilmiş və isbat edilmişdir. Buraxılış içində aşağıdakı əsas nəticə alınmışdır.

Teorem. *(1), (2) sərhəd məsələsinin* λ_0 *məxsusi ədədinin təkrarlanan (həmçinin* λ_0 *ədədinin (1),(2) məsələsinin xarakteristik funksiyasının təkrarlanan sıfrı) olması üçün zəruri və kafi şərti* ω*-nın sıfırdan fərqli həqiqi ədəd olması və*

$$s(\lambda_0, \pi) = \propto c(\lambda_0, \pi) + c'(\lambda_0, \pi) = 0$$

olmasıdır, burada $c(\lambda, x)$ *və* $s(\lambda, x)$ (1) *differensial tənliyinin*

$$\begin{gathered} c(\lambda, 0) = s'(\lambda, 0) = 1, \\ c'(\lambda, 0) = s(\lambda, 0) = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həlləridir.

§1.Köməkçi faktlar

Asanlıqla göstərmək olar ki, $c\,(\lambda,x)\ və\ s\,(\lambda,x)$ həllərinin Vronski determinantı 1-ə bərabərdir. Doğrudan da,

$$W\{c(\lambda,x),(\lambda,x)\} = \begin{vmatrix} c(\lambda,x) & s(\lambda,x) \\ c'(\lambda,x) & s'(\lambda,x) \end{vmatrix} = c(\lambda,x)s'(\lambda,x) -$$

$$-c'(\lambda,x)s(\lambda,x) = c(\lambda,0)s'(\lambda,0) - c'(\lambda,0)s(\lambda,o) = 1\ . \qquad (4)$$

Deməli, $c(\lambda,x)\ və\ s(\lambda,x)$ xətti asılı olmayan həllərdir. Buna görə (1) tənliyinin istənilən $y(\lambda,x)$ həlli bu həllərin xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilər:

$$y\,(\lambda,x) = C_1(\lambda,x) + C_2 s\,(\lambda_1 x),$$

burada c_1, c_2 istənilən sabitlərdir. Bu həlli (2) sərhəd şərtlərində yerinə yazaq,

$$C_1\,c(\lambda,0) + C_2 s(\lambda,0) + \omega C_1 c(\lambda,\pi) + \omega C_2 s(\lambda,\pi) = 0$$

$$\bar{\omega}C_1c'(\lambda,o)+\bar{\omega}C_2s'(\lambda,0)+\propto C_1c(\lambda,\pi)+\propto C_2s(\lambda,\pi)+$$

$$+C_1c'(\lambda,\pi)+C_2s'(\lambda,\pi)=0$$

(3) şərtlərini nəzərə alsaq, C_1 $və$ C_2-yə nəzərən aşağıdakı xətti tənliklər sistemini alarıq.

$$\begin{cases} C_1[1+\omega c(\lambda,\pi)]+\omega C_2s(\lambda,\pi)=0 \\ C_1[\propto c(\lambda,\pi)+c'(\lambda,\pi)]+C_2[\bar{\omega}+\propto s(\lambda,\pi)+s'(\lambda,\pi)]=0 \end{cases}$$

Məlumdur ki, bu bircins tənliklər sisteminin trivial olmayan həllinin olması

üçün zəruri və kafi şərt $\begin{vmatrix} 1+\omega c(\lambda,\pi) & \omega s(\lambda,\pi) \\ \propto c(\lambda,\pi)+c'(\lambda,\pi) & \bar{\omega}+\propto s(\lambda,\pi)+s'(\lambda,\pi) \end{vmatrix}=0$

olmasıdır. Buradan (4)-ü nəzərə almaqla

$$[1+\omega c(\lambda,\pi)][\bar{\omega}+\propto s(\lambda,\pi)+s'(\lambda,\pi)]-$$

$$-\omega s(\lambda,\pi)[\propto c(\lambda,\pi)+c'(\lambda,\pi)]=0,$$

$$\bar{\omega}+\propto s(\lambda,\pi)+s'(\lambda,\pi)+|\omega|^2c(\lambda,\pi)+\propto c(\lambda,\pi)\omega s(\lambda,\pi)+$$

$$+\omega c(\lambda,\pi)s'(\lambda,\pi)-\omega\propto c(\lambda,\pi)s(\lambda,\pi)-\omega c'(\lambda,\pi)s(\lambda,\pi)=0$$

və ya

$$\Delta(\lambda)=2Re\omega+|\omega|^2c(\lambda,\pi)+\propto s(\lambda,\pi)+s'(\lambda,\pi)=0 \qquad (5)$$

Deməli, (1), (2) məsələsinin məxsusi ədədləri $\Delta(\lambda)$ xarakteristik funksiyasının sıfırları ilə üst-üstə düşür.

Lemma 1. *(1), (2) məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqidir.*

İsbatı. Tutaq ki, λ məsələnin məxsusi ədədi, $y(\lambda,x)$ isə uyğun məxsusi funksiyadır. Onda aydındır ki,

$$-y''(\lambda,x)+q(x)y(\lambda,x)=\lambda y(\lambda,x) \qquad və$$

$$\overline{-y''(\lambda,x)}+q(x)\overline{y(\lambda,x)}=\overline{\lambda y(\lambda,x)}.$$

Bu bərabərliklərdən birincisini $\overline{y(\lambda,x)}$-a, ikincisini $y(\lambda,x)$-a vurub tərəf-tərəfə çıxaq.

$y(\lambda,x)\overline{y''(\lambda,x)}-y''(\lambda,x)\overline{(\lambda,x)}=(\lambda-\overline{\lambda})|y(\lambda,x)|^2$ alarıq. Bu bərabərliyi x-ə görə 0-dan π-yə qədər inteqrallayaq:

$$(\lambda-\bar{\lambda})\int_0^{\pi}|y(\lambda,x)|^2\,dx=\int_0^{\pi}\left[y(\lambda,x)\overline{y''(\lambda,x)}-y''(\lambda,x)\overline{y(\lambda,x)}\right]dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\left[y(\lambda,x)\overline{y'(\lambda,x)}-y'(\lambda,x)\overline{y(\lambda,x)}\right]'dx=$$

$$=y(\lambda,\pi)\overline{y'(\lambda,\pi)}-y'(\lambda,\pi)\overline{y(\lambda,\pi)}-y(\lambda,0)\overline{y'(\lambda,0)}+$$

$$+y'(\lambda,0)\overline{y(\lambda,0)}\,. \tag{6}$$

(2) sərhəd şərtlərinə əsasən

$$y(\lambda,0) = -\omega y(\lambda,\pi)$$

$$y'(\lambda,\pi) = -\overline{\omega} y'(\lambda,0) - \propto y(\lambda,\pi)$$

Bunları (6)-da yerinə yazaq:

$$(\lambda-\bar{\lambda})\int_0^\pi |y(\lambda,x)|^2 dx = -y(\lambda,\pi)\left[\omega\overline{y'(\lambda,0)} + \overline{\propto y(\lambda,\pi)}\right] +$$

$$+\overline{y(\lambda,\pi)}[\overline{\omega}y'(\lambda,0) + \propto y(\lambda,\pi)] + \omega y(\lambda,\pi)\overline{y'(\lambda,0)} -$$

$$-\overline{\omega}\overline{y(\lambda,\pi)}y'(\lambda,0) = 0.$$

$y(\lambda,x)$ məxsusi funksiya olduğundan $y(\lambda,x) \neq 0$ və deməli, $\int_0^\pi |y(\lambda,x|^2 dx \neq 0$.

Onda axırıncı bərabərlikdən $\lambda = \bar{\lambda}$, yəni λ məxsusi ədədinin həqiqi olması alınır. Lemma isbat olundu.

Lemma 2. *Aşağıdakı bərabərliklər doğrudur.*

$$\frac{\partial s(\lambda,x)}{\partial\lambda} = \int_0^x [s(\lambda,t)c(\lambda,x) - s(\lambda,x)c(\lambda,t)]\, s(\lambda,t)dt$$

$$\frac{\partial s'(\lambda,x)}{\partial x} = \int_0^x [c'(\lambda,x)s(\lambda,t) - s'(\lambda,t)c(\lambda,t)]s(\lambda,t)dt \qquad (7)$$

$$\frac{\partial c(\lambda,x)}{\partial \lambda} = \int_0^x [c(\lambda,x)s(\lambda,t) - s(\lambda,x)c(\lambda,t)]c(\lambda,t)dt$$

İsbatı. s($\lambda, x)$ funksiyası (1) tənliyinin həlli olduğundan

$$-\frac{\partial^2 s(\lambda,x)}{\partial x^2} + q(x)s(\lambda,x) = \lambda s(\lambda,x).$$

Bu eyniliyi $\lambda - ya$ görə differensiallasaq

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial s(\lambda,x)}{\partial x}\right] + [\lambda - q(x)]\frac{\partial s(\lambda,x)}{\partial \lambda} = -s(\lambda,x) \tag{8}$$

alınar. (3) şərtlərinə əsasən

$$\frac{\partial s(\lambda,0)}{\partial \lambda} = \frac{\partial s'(\lambda,0)}{\partial \lambda} = 0 \tag{9}$$

$\frac{\partial s(\lambda,x)}{\partial \lambda}$ funksiyasını (8) bircins olmayan tənliyin (9) başlanğıc şərtlərini ödəyən həlli kimi tapaq.

Sabitlərin variasiyası üsulunu tətbiq edək. $\frac{\partial s(\lambda,x)}{\partial \lambda} = u(\lambda,x)$ işarə edək.

Aydındır ki, $c(\lambda, x$ və $s(\lambda, x)$ funksiyaları (8) tənliyinə uyğun

$$u''(\lambda,x) + [\lambda - q(x)]u(\lambda,x) = 0$$

Bircins tənliyinin fundamental həllər sistemini təşkil edir. Ona görə də (8) tənliyinin həllini

$$u(\lambda, x) = C_1(x)c(\lambda, x) + C_2(x)s(\lambda, x) \qquad (10)$$

şəklində axtaraq. Buradan *x*-ə görə törəmə alsaq

$$u'(\lambda, x) = C_1'(x)c(\lambda, x) + C_1(x)c'(\lambda, x) +$$

olar.

$C_1(x)$ *və* $C_2(x)$ funksiyalarını ilə verək ki,

$$C_1'(x)c(\lambda, x) + C_2'(x)s(\lambda, x) = 0 \qquad (11)$$

olsun. Onda

$$U'(\lambda, x) = C_1(x)c'(\lambda, x) + C_2(x)s'(\lambda, x)$$

olar və buradan

$$U''(\lambda, x) = C_1'(x)c'(\lambda, x) + C_1(x)c''(\lambda, x) +$$

$$+C_2'(x)s'(\lambda, x) + C_2(x)s''(\lambda, x)$$

Bu bərabərliyi və (10)-u (8)-də nəzərə alsaq, $C_1'(x)$ və $C_2'(x)$ törəmələrinə nəzərən daha bir tənlik alarıq:

(12)

$C_1'(x)$ və funksiyaların (11) və (12) tənliklərindən təşkil olunmuş sistemdən təyin edək. Bu zaman (4)-ü nəzərə alaq:

$$C_1'(x) = \frac{s^2(\lambda, x)}{W\{c(\lambda, x), s(\lambda, x\}} = s^2(\lambda, x)$$

$$C_2'(x) = \frac{-c(\lambda, x)s(\lambda, x)}{W\{c(\lambda, x), s(\lambda, x\}} = -c(\lambda, x)s(\lambda, x)$$

buradan

$$C_1(x) = C_1^0 + \int_0^x s^2(\lambda, t)dt$$

$$C_2(x) = C_2^0 - \int_0^x c(\lambda, t)\, s(\lambda, t)dt$$

$$C_1^0 = C_1(0), \quad C_2^0 = C_2(0)$$

Bunları (10)-da yerinə yazaq:

$$u(\lambda, x) = \left[C_1^0 + \int_0^x s^2(\lambda, t)dt\right] c(\lambda, x) +$$

$$+ \left[C_2^0 - \int_0^x c(\lambda, t)s(\lambda, t)dt\right] s(\lambda, x)$$

(9) başlanğıc şərtlərindən $C_1^0 = C_2^0 = 0$ alınır. Deməli,

$$u(\lambda, x) = \int_0^x [c(\lambda, x)s(\lambda, t) - s(\lambda, x)c(\lambda, t)]\, s(\lambda, t)dt$$

yəni lemmadakı birinci düstur isbat olundu. Eyni qayda ilə (7)-dəki üçüncü düsturu almaq olar. İkinci düstur isə axırıncı bərabərliyi *x*-ə görə differensiallamqla alınır. Lemma isbat olundu.

Lemma 3. *Əgər,* $\Delta(\lambda_0) = 0$ *və* $s(\lambda_0,\pi) \neq 0$ *olarsa, onda* $\frac{d\Delta(\lambda_0)}{d\lambda} \neq 0$

İsbatı. (5) münasibətinə və lemma 2-yə əsasən

$$\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d[2Re\omega + |\omega|^2 c(\lambda,\pi) + \propto s(\lambda,\pi) + s'(\lambda,\pi)]}{d\lambda} =$$

$$= |\omega|^2 \frac{\partial c(\lambda,\pi}{\partial\lambda} + \propto \frac{\partial s(\lambda,\pi)}{\partial\lambda} + \frac{\partial s'(\lambda,\pi)}{\partial\lambda} =$$

$$= |\omega|^2 \int_0^\pi [c(\lambda,\pi)s(\lambda,t) - s(\lambda,\pi)c(\lambda,t)]c(\lambda,t)dt +$$

$$+\propto \int_0^\pi [c(\lambda,\pi)s(\lambda,t) - s(\lambda,\pi)c(\lambda,t)]s(\lambda,t)dt +$$

$$+ \int_0^\pi [c'(\lambda,\pi)s(\lambda,t) - s'(\lambda,\pi)c(\lambda,t)]\, s(\lambda,t)dt =$$

(13)

$$= \int_0^\pi \{[|\omega|^2 c(\lambda,\pi) - \propto s(\lambda,\pi) - s'(\lambda,\pi)]c(\lambda,t)s(\lambda,t) -$$

$$-|\omega|^2 s(\lambda,\pi)c(\lambda,t) + [\propto c(\lambda,\pi) + c'(\lambda,\pi)]s^2(\lambda,t\}dt$$

$\Delta(\lambda_0) = 0$ olduqda λ_0 ədədi (1), (2) məsələsinin məxsusi ədədidir. Bu məxsusi ədədə uyğun məxsusi funksiyanı $f_0(x)$ ilə işarə edək. Deməli, $f_0(x) \neq 0$ və

$$-f_0''(x) + q(x)f_0(x) = \lambda_0 f_0(x)$$

$$f_0(0) + \omega f_0(\pi) = 0$$

$$\overline{\omega} f_0'(0) + \propto f_0(\pi) + f_0'(\pi) = 0.$$

$C(\lambda_0, x)$ və $S(\lambda_0, x)$ funksiyaları (1) tənliyinin fundamental həllər sistemini təşkil etdiyindən

$$f_0(x) = C_1 c(\lambda_0 x) + C_2 s(\lambda_0, x),$$

burada C_1 və C_2 istənilən sabitlərdir. (3) şərtlərindən istifadə etsək, $C_1 = f_0(0)$ və $C_2 = f_0'(0)$ alarıq. Deməli,

$$f_0(x) = f_0(0) c(\lambda_0, x) + f_0'(0) s(\lambda_0, x) \tag{14}$$

Burada $x = \pi$ yazıb hər -ω-ya vuraq və $f_0(0) = -\omega f_0(\pi)$ olduğunu nəzərə alsaq $f_0(0) = -\omega f_0(0) c(\lambda_0, \pi) - \omega f_0'(0) s(\lambda_0, \pi)$ olar. Şərtə görə $s(\lambda_0, \pi) \neq 0$ olduğundan axırıncı bərabərlikdən

$$f_0'(0) = -\frac{1 + \omega c(\lambda_0, \pi)}{\omega s(\lambda_0, \pi)} f_0(0),$$

Birinci lemmaya görə λ_0 həqiqi ədəddir. Onda $q(x)$ həqiqi funksiya olduğundan, aydındır ki, $c(\lambda_0,\pi)$ və $s(\lambda_0,\pi)$ də həqiqidir. Bunları nəzərə alsaq, axırıncı bərabərlikdən

$$f_0'(0) = -\frac{1+\bar{\omega}c(\lambda_0,\pi)}{\bar{\omega}S(\lambda_0,\pi)} f_0(0),$$

alınır.Axırıncı iki bərabərlik göstərir ki,

$$|f_0'(0)|^2 = f_0'(0)f_0'(0) = \frac{1+2Re\omega\cdot c(\lambda_0,\pi)+|\omega|^2c^2(\lambda_0,\pi)}{|\omega|^2s^2(\lambda_0,\pi)}|f_0(0)|^2$$

$$2\,Re\omega = -|\omega|^2c(\lambda_0,\pi) - \propto s(\lambda_0,\pi) - s'(\lambda_0,\pi)$$

və

$$1 - c(\lambda_0,\pi)s'(\lambda_0,\pi) = -c'(\lambda_0,\pi)s(\lambda_0,\pi)$$

olduğundan

$$|f_0'(0)|^2 \frac{1-[|\omega|^2c(\lambda_0,\pi)+\propto s(\lambda_0,\pi)+s'(\lambda_0,\pi)]c(\lambda_0,\pi)+|\omega|^2c^2(\lambda_0,\pi)}{|\omega|^2s^2(\lambda_0,\pi)}|f_0(0)|^2 =$$

$$= \frac{1-c(\lambda_0,\pi)s'(\lambda_0,\pi)-\propto c(\lambda_0,\pi)s(\lambda_0,\pi)}{|\omega|^2s^2(\lambda_0,\pi)}|f_0(0)|^2 =$$

$$= \frac{-c^2(\lambda_0,\pi)s(\lambda_0,\pi)-\propto c(\lambda_0,\pi)s(\lambda_0,\pi)}{|\omega|^2s^2(\lambda_0,\pi)}|f_0(0)|^2 =$$

$$= -\frac{c'(\lambda_0,\pi)+\propto c(\lambda_0,\pi)}{|\omega|^2s^2(\lambda_0,\pi)}|f_0(0)|^2 \qquad (15)$$

Aydındır ki,

$$f_0(0)\overline{f_0'(0)}+\overline{f_0(0)}f_0'(0)=-\left[\frac{1+\bar{\omega}c(\lambda_0,\pi)}{\bar{\omega}s(\lambda_0,\pi)}\right. +$$

$$\left.+\frac{1+\omega c(\lambda_0,\pi)}{\omega s(\lambda_0,\pi)}\right]|f_0(0)|^2=-\frac{2\,Re\omega+2|\omega|^2c(\lambda_0,\pi)}{|\omega|^2s(\lambda_0,\pi)}\,|f_0(0)|^2=$$

$$=\frac{-|\omega|^2c(\lambda_0,\pi)-\propto s(\lambda_0,\pi)-s'(\lambda_0,\pi)+2|\omega|^2c(\lambda_0,\pi)}{|\omega|^2s(\lambda_0,\pi)}\,|f_0(0)|^2= \qquad (16)$$

$$=\frac{|\omega|^2c(\lambda_0,\pi)-\propto s(\lambda_0,\pi)-s'(\lambda_0,\pi)}{|\omega|^2s(\lambda_0,\pi)}|f_0(0)|^2$$

(14) münasibətindən asanlıqla aşağıdakı bərabərliyi almaq olar.

$$|f_0(0)|^2=f_0(x)\overline{f_0(x)}=|f_0(0)|^2c^2(\lambda_0,x)+|f_0'(0)|^2s^2(\lambda_0,x)+$$

$$+\left[f_0(0)\overline{f_0'(0)}+\overline{f_0(0)}f_0'(0)\right]c(\lambda_0,x)s(\lambda_0,x)$$

Burada (15) və (16) – nı nəzərə alsaq.

$$|f_0(x)|^2=\{|\omega|^2s(\lambda_0,\pi)c^2(\lambda_0,x)-[\propto c(\lambda_0,\pi)+c'(\lambda_0,\pi)]\,s^2(\lambda_0,x)-$$

$$-[|\omega|^2c(\lambda_0,\pi)-\propto s(\lambda_0,\pi)-s'(\lambda_0,\pi)]c(\lambda_0,x)\,s(\lambda_0,x)\}\frac{|f_0(0)|^2}{|\omega|^2s(\lambda_0,\pi)}$$

alınır.

Axırıncı bərabərliyi $[o,\pi]$ parçasında inteqrallayaq və (13)-ü nəzərə alaq.

$$\int_0^{\pi} |f_0(x)|^2 dx = -\frac{|f_0(0)|^2}{|\omega|^2 S(\lambda_0,\pi)} \cdot \frac{d \bigtriangleup (\lambda_0)}{d\lambda}$$

$f_0(x)$ məxsusi funksiya olduğundan $f_0(x) \not\equiv 0$ və deməli, bu bərabərliyin sol tərəfi 0-dan fərqlidir. Onda aydındır ki, $\frac{d \bigtriangleup (\lambda_0)}{d\lambda} \neq 0$ olmalıdır. Lemma isbat olundu.

§2. Məxsusi ədədlərin təkrarlanma şərti

Ayrılan sərhəd şərtli məsələlərdən fərqli olaraq (1), (2) məsələsinin təkrarlanan məxsusi ədədləri ola bilər. Aydındır ki, bu halda məxsusi ədədlərin təkrarlanma dərəcəsi 2-dən böyük ola bilməz.

İndi (1), (2) məsələsinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanma meyarını isbat edək.

Teorem 1. *(1), (2) sərhəd məsələsinin* λ_0 *məxsusi ədədinin təkrarlanan olması üçün zəruri və kafi şərti* ω*-nın sıfırdan fərqli həqiqi ədəd olması və*

$$s(\lambda_0,\pi) = \propto c(\lambda_0,\pi) + c'(\lambda_0,\pi) = 0 \quad (17)$$

olmasıdır.

İsbatı. Z<u>*ərurilik*</u>. Tutaq ki, λ_0 baxılan məsələnin təkrarlanan məxsusi ədədidir. Onda aydındır ki, bu məxsusi ədədə xətti asılı olmayan iki məxsusi funksiya uyğundur. Onları $y_1(\lambda_0,x)$ və $y_2(x,\lambda_0)$ ilə işarə edək. Onda (1) tənliyinin istənilən həlli $y_1(\lambda_0,x)$ və $y_2(\lambda_0,x)$ funksiyalarının xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilər və deməli (2) şərtlərini ödəyir. Xüsusi halda $c\,(\lambda_0,x)$ və $s\,(\lambda_0,x)$ həlləri də (2) şərtlərini ödəyir. Ona görə də

$$c(\lambda_0,0) + \omega c(\lambda_0,\pi) = 0,$$

$$\bar{\omega}c'(\lambda_0,0) + \propto c(\lambda_0,\pi) + c'(\lambda_0,\pi) = 0;$$

$$s(\lambda_0,0) + \omega s(\lambda_0,\pi) = 0,$$

$$\bar{\omega}s'(\lambda_0,0) + \propto s(\lambda_0,\pi) + s'(\lambda_0,\pi) = 0$$

(3) başlanğıc şərtlərini nəzərə alsaq,

$$1 + \omega c(\lambda_0,\pi) = 0$$

$$\propto c(\lambda_0,\pi) + c'(\lambda_0,\pi) = 0;$$

(18)

$$s(\lambda_0,\pi) = 0,$$

$$\overline{\omega}+\propto s(\lambda_0,\pi)+s'(\lambda_0,\pi)=0$$

Deməli, (17) şərtləri ödənilir. $c(\lambda,\pi)$ funksiyası λ-nın həqiqi qiymətində həqiqi qiymətlər aldığından (18) bərabərliyi göstərir ki, ω həqiqi ədəddir və sıfırdan fərqlidir.

Kafilik. Tutaq ki, ω – sıfırdan fərqli həqiqi ədəddir və (17) bərabərlikləri doğrudur. Göstərək ki, λ_0 - təkrarlanan məxsusi ədəddir. $S(\lambda_0,\pi)=0$ olduğundan $c(\lambda,x)s'(\lambda,x)-c'(\lambda,x)s(\lambda,x)\equiv 1$ eyniliyindən alırıq ki,

$$c(\lambda_0,\pi)s'(\lambda_0,\pi)=1 \tag{19}$$

Digər tərəfdən (5) münasibətindən

$$2\omega+\omega^2c(\lambda_0,\pi)+s'(\lambda_0,\pi)=0 \tag{20}$$

və buradan da (19) – u nəzərə almaqla

$$2\omega+\frac{\omega^2}{s'(\lambda_0,\pi)}+s'(\lambda_0,\pi)=0,$$

$$[\omega+s'(\lambda_0,\pi)]^2=0,$$

yəni

$$s'(\lambda_0,\pi)+\omega=0 \tag{21}$$

alınır. (20) bərabərliyinə $s'(\lambda_0,\pi)=-\omega$ yazsaq

$$\omega + \omega^2 c\,(\lambda_0, \pi) = 0$$ və ya

$$1 + \omega c(\lambda_0, \pi) = 0 \qquad (22)$$

olar. ω-nın həqiqiliyi, (17), (21), (22) və (3) bərabərlikləri göstərir ki, (1) tənliyinin $c(\lambda_0, x)$ və $s(\lambda_0, x)$ həlləri (2) sərhəd şərtlərini ödəyir. Ona görə də onlar (1), (2) məsələsinin məxsusi funksiyalarıdır. Bundan başqa, bilirik ki, həmin funksiyalar xətti asılı deyillər. Beləliklə, λ_0 məxsusi ədədinə xətti asılı olmayan iki məxsusi funksiya uyğundur. Deməli, λ_0 - təkrarlanan məxsusi ədəddir.Teorem isbat olundu.

§3. Xarakteristik funksiyanın sıfırlarının təkrarlanma dərəcəsi haqqında

Məlumdur ki, (1), (2) məsələsinin müəyyən λ_0 məxsusi ədədinin təkrarlanma dərəcəsi $\Delta(\lambda)$ xarakteristik funksiyasının λ_0 sıfırının təkrarlanma dərəcəsindən böyük deyildir. (bax. məs., $[3, səh. 26]$). Bu paraqrafda $\Delta(\lambda)$-nın sıfırlarının təkrarlanma meyarını isbat edəcək və göstərəcəyik ki, xarakteristik funksiyasının sıfırlarının təkrarlanma dərəcəsi 2-dən böyük ola bilməz.

Teorem 2. *λ_0 ədədinin $\Delta(\lambda)$ funksiyasının təkrarlanan sıfırı olması üçün zəruri və kafi şərt ω - nın sıfırdan fərqli həqiqi ədəd olması və*

$$s(\lambda_0,\pi) = \propto c(\lambda_0,\pi) + c'(\lambda_0,\pi) = 0 \tag{17}$$

bərabərliklərinin ödənilməsidir.

İsbatı. <u>*Zərurilik.*</u> Tutaq ki, λ_0 ədədi $\Delta(\lambda) = 0$ tənliyinin təkrarlanan köküdür, yəni $\frac{d\Delta(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ Əgər $s(\lambda_0,\pi) \neq 0$ olsa idi, onda lemma 3-dən olardıq ki, $\frac{d\Delta(\lambda_0)}{d\lambda} \neq 0$. Bu isə şərtə ziddir. Deməli,

$$s(\lambda_0,\pi) = 0.$$

Onda (4) eyniliyindən $c(\lambda_0,\pi)s'(\lambda_0,\pi) = 1$ (19) alınır.

$\Delta(\lambda_0) = \omega + \bar{\omega} + |\omega|^2 c(\lambda_0,\pi) + s'(\lambda_0,\pi) = 0$ olduğundan

$$s'(\lambda_0,\pi) = -\omega - \bar{\omega} - |\omega|^2 c(\lambda_0,\pi)$$

Onda

$$c(\lambda_0,\pi)[\omega + \bar{\omega} + |\omega|^2 c(\lambda_0,\pi)] + 1 = 0$$

və ya

$$[1 + \omega c(\lambda_0,\pi)][1 + \bar{\omega} c(\lambda_0,\pi)] = 0.$$

Aydındır ki,

$$[1 + (Re\omega + iIm\omega)c(\lambda_0,\pi)][1 + (Re\omega - iIm\omega)c(\lambda_0,\pi)] = 0,$$

$$[1 + Re\omega \cdot c(\lambda_0,\pi)]^2 + [I\,m\omega c(\lambda_0,\pi)]^2 = 0.$$

Buradan

$1 + Re\omega\, c(\lambda_0,\pi) = 0$ və $Im\omega c(\lambda_0,\pi) = 0$

(19) –dan alınır ki, $c(\lambda_0,\pi) \neq 0$. Onda axırıncı bərabərlik göstərir ki, $Im\omega = 0$, yəni ω həqiqi ədəddir. $1 + \omega c(\lambda_0,\pi) = 0$ bərabərliyi göstərir ki, $\omega \neq 0 \cdot c\,(\lambda_0,\pi) = -\frac{1}{\omega}$ olduğundan (19)-dan $s'\,(\lambda_0,\pi) = -\omega$ alırıq. Onda

$$|\omega|^2 c(\lambda_0,\pi) - \propto s(\lambda_0,\pi) - s'\,(\lambda_0,\pi) =$$

$$= \omega^2{}_{\mathrm{c}}(\lambda_0,\pi) + \omega = 0$$

$\frac{d\Delta\lambda_0}{d\lambda} = 0;$ $s(\lambda_0,\pi) = 0$ və axırıncı bərabərliyi nəzərə almaqla (13)-dan

çıxır ki,

$$[\propto c(\lambda_0,\pi) + c'(\lambda_0,\pi)] \int_0^\pi s^2(\lambda_0,t)\,dt = 0 \tag{23}$$

$$s(\lambda_0,0) + \omega s(\lambda_0,\pi) = 0 \text{ } v\partial \text{ } \bar{\omega}s'(\lambda_0,\pi) + \propto s(\lambda_0,\pi) + s'(\lambda_0,\pi) = 0$$

olduğundan (1) tənliyinin s(λ_0,x) həlli (2) sərhəd şərtlərini ödəyir. Deməli,s(λ_0,x) funksiyası λ_0-a uyğun məxsusi funksiyadır. Deməli, $\int_0^\pi s^2\,(\lambda_0,t)dt \neq 0.$ Onda (23)-dən alınır ki, $\propto c(\lambda_0,\pi) + c'(\lambda_0,\pi) = 0$.

<u>Kafilik.</u> Tutaq ki, $\Delta(\lambda_0)$=0, $\omega \neq 0$ həqiqi ədəddir və (17) bərabərlikləri ödənilir. Göstərək ki, $\frac{d\Delta(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$.

(4) eyniliyindən (17) nəzərə alsaq (19) alınar. ω həqiqi ədəd olduğundan

$\Delta(\lambda_0) = 2\omega + \omega^2 c(\lambda_0,\pi) + s'(\lambda_0\pi) = 0$. Buradan

$s'(\lambda_0,\pi)=2\omega-\omega^2 c(\lambda_0,\pi)$. Bunu (19) da yerinə yazaq:

$$[\omega c(\lambda_0,\pi)+1]^2=0,$$ yəni

$$1+\omega c(\lambda_0,\pi)=0$$

alınır.Onda $s'(\lambda_0,\pi)=-\omega$.Beləliklə,

$$\omega^2 c(\lambda_0,\pi)-\alpha s(\lambda_0,\pi)-s'(\lambda_0,\pi)=0,$$

$$s(\lambda_0,\pi)=\alpha c(\lambda_0,\pi)+c'(\lambda_0,\pi)=0.$$

Onda (13)-dən alınır ki, $\frac{d\Delta(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$.

Teorem isbat olundu.

Teorem 3. *$\Delta\lambda$ xarakteristik fuksiyasının sıfırlarının təkrarlanma dərəcəsi 2-dən böyük deyil.*

İsbatı. Göstərmək lazımdır ki,əgər $\Delta(\lambda_0)=0$ və $\frac{d\Delta(\lambda_0)}{d\lambda}=0$ olarsa ,

$\frac{d^2\Delta(\lambda_0)}{d\lambda^2}\neq 0$.

Teorem 2-nin zəruriliyinin isbatı zamanı gostərilmişdir ki,

$$\omega^2 c(\lambda_0,\pi)-\alpha s(\lambda_0,\pi)-s'(\lambda_0,\pi)=\alpha c(\lambda_0,\pi)+c'(\lambda_0,\pi)=s(\lambda_0,\pi)=0. \qquad (24)$$

(13) bərabərliyini λ-ya görə diferensiallayıb λ-nın yerinə λ_0 yazsaq və (24) bərabərliyindən istifadə etsək, aşağıdakını alarıq.

$$\frac{d^2\Delta(\lambda_0)}{d\lambda^2}=\int_0^{\pi}\left\{\left[|\omega|^2\dot{c}(\lambda_0,\pi)-\alpha\dot{s}(\lambda_0,\pi)-\dot{s}'(\lambda_0,\pi)\right]c(\lambda_0,t)s(\lambda_0,t)-\left[|\omega|^2\dot{s}(\lambda_0,\pi)c^2(\lambda_0,t)+\left(\alpha\dot{c}(\lambda_0,\pi)+\dot{c}'(\lambda_0,\pi)\right)s^2(\lambda_0,t)\right]\right\}dt \qquad (25)$$

(burada nöqtə ilə λ-ya görə törəmə işarə edilmişdir). (7) bərabərlikləri göstərir ki,

$\dot{s}(\lambda_0,\pi)=c(\lambda_0,\pi)\int_0^{\pi}s^2(\lambda_0,t)\,dt$

$\dot{c}(\lambda_0,\pi)=c(\lambda_0,\pi)\int_0^{\pi}c(\lambda_0,t)s(\lambda_0,t)dt$

$\dot{s}'(\lambda_0,\pi)=c'(\lambda_0,\pi)\int_0^{\pi}s^2(\lambda_0,t)dt-s'(\lambda_0,\pi)\int_0^{\pi}c(\lambda_0,t)\,s(\lambda_0,t)dt$

$c'(\lambda_0,\pi)=c'(\lambda_0,\pi)\int_0^{\pi}c(\lambda_0,t)\,s(\lambda_0,t)dt-s'(\lambda_0,\pi)\int_0^{\pi}c^2(\lambda_0,t)dt$

(burada $s(\lambda_0,\pi)=0$ olmasından istifadə etdik). Bunları (25)-də nəzərə alaq:

$$\frac{d^2\Delta(\lambda_0)}{d\lambda^2}=\omega^2c(\lambda_0,\pi)\left\{\int_0^{\pi}c(\lambda_0,t)s(\lambda_0,t)\,dt\right\}^2-$$

$-\alpha c(\lambda_0,\pi)\int_0^\pi s^2(\lambda_0,t)\,dt\int_0^\pi c(\lambda_0,t)s(\lambda_0,t)\,dt-$

$-c'(\lambda_0,\pi)\int_0^\pi s^2(\lambda_0,t)\,dt\int_0^\pi c(\lambda_0,t)s(\lambda_0,t)\,dt+s'(\lambda_0,\pi)\left\{\int_0^\pi c(\lambda_0,t)s(\lambda_0,t)\,dt\right\}^2-$

$-\omega^2 c(\lambda_0,\pi)\int_0^\pi c^2(\lambda_0,t)\,dt\int_0^\pi s^2(\lambda_0,t)\,dt+$

$+\alpha c(\lambda_0,\pi)\int_0^\pi s(\lambda_0,t)\,dt\int_0^\pi c(\lambda_0,t)\,s(\lambda_0,t)dt+$

$+c'(\lambda_0,\pi)\int_0^\pi s^2(\lambda_0,t)\,dt\int_0^\pi c(\lambda_0,t)\,s(\lambda_0,t)dt-$

$-s'(\lambda_0,\pi)\int_0^\pi c^2(\lambda_0,t)\,dt\int_0^\pi s^2(\lambda_0,t)\,dt.$

Burada

$$\Delta(\lambda_0)=\omega^2 c(\lambda_0,\pi)+\alpha s(\lambda_0,\pi)+s'(\lambda_0,\pi)+2\omega=0$$

və (24) bərabərliyindən istifadə etsək

$$\frac{d^2\Delta(\lambda_0)}{d\lambda^2}=-2\omega\left\{\int_0^\pi c(\lambda_0,t)S(\lambda_0,t)\,dt\right\}^2+2\omega\int_0^\pi c^2(\lambda_0,t)\,dt\int_0^\pi s^2(\lambda_0,t)\,dt. \qquad (26)$$

alınar. $\omega\neq0$ olduğunu və $c(\lambda_0,t)$, $s(\lambda_0,t)$ funksiyalarının xətti asılı olmadığını nəzərə alsaq axırıncı bərabərlikdən Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə görə $\frac{d^2\Delta(\lambda_0)}{d\lambda^2}\neq0$ alınar.

Teorem isbat olundu.

Nəticə. *λ_0 ədədi $\Delta(\lambda)$-nın yalnız və yalnız o zaman iki dəfə təkrarlanan sıfrı olur ki, $\lambda=\lambda_0$ nöqtəsi $\Delta(\lambda)$-nın ekstremum ($\omega<0$ olduqda maksimum, $\omega>0$ olduqda isə minimum) nöqtəsi olsun.*

Doğrudan da, əgər λ_0 $\Delta(\lambda)$-nın təkrarlanan sıfırıdırsa, onda $\frac{d\Delta(\lambda_0)}{d\lambda}=0$,

Yəni λ_0 $\Delta(\lambda)$-nın stasionar nöqtəsidir. Teorem 3-ə görə $\frac{d^2\Delta(\lambda_0)}{d\lambda^2}\neq0$.

Deməli, λ_0 nöqtəsi $\Delta(\lambda)$-nın ekstremum nöqtəsidir. (26)-dan Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə görə alınır ki, $\omega<0$ olduqda $\frac{d^2\Delta(\lambda_0)}{d\lambda^2}<0$, yəni λ_0 maksimum nöqtəsi , $\omega>0$ olduqda $\frac{d^2\Delta(\lambda_0)}{d\lambda^2}>0$, yəni λ_0 minimum nöqtəsidir.

Tərsinə, əgər $\Delta(\lambda)$-nın λ_0 sıfrı ekstremum nöqtəsidirsə,onda $\Delta(\lambda_0)=0$,

$\frac{d\Delta(\lambda_0)}{d\lambda}=0$, $\frac{d^2\Delta(\lambda_0)}{d\lambda^2}\neq 0$, yəni λ_0 ədədi $\Delta(\lambda)$-nın iki dəfə təkrarlanan sıfrıdır.

Ədəbiyyat

1.Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.Киев: Наукова думка,1977.

2.Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука,1984.

3.Наймарк М.А. Линейные дифференциалные операторы.М.: Наука,1969.

4.Набиев И.М. Кратност и взаимное расположение собственных значений квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля //Математические заметки,2000, т.67,№3,с.369-381.

5.Набиев И.М. Обратная квазипериодическая задача для оператора диффузии // Докл. РАН.,2007, т.415, №2,с.168-170.