AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRİYİ

BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika

Tətbiqi riyaziyyat bakalavr ixtisası dərəcəsi almaq üçün

«Lokal olmayan sərhəd şərtli optimal idarəetmə məsələsinin aproksimasiyası» mövzusunda

BURAXILIŞ İŞİ

B A K I – 2 0 0 9

MÜNDƏRİCAT

§ 1. Məsələnin qoyuluşu

Aşağıdakı kimi optimal idaretmə məələsinə baxaq:

$$J(u)=\Phi(x(T,u)) \rightarrow min, \qquad (1)$$

$$\dot{x}=f(x,u,t), \quad t_0 \leq t \leq T \qquad (2)$$

$$\int_{t_0}^{T} K(t)x(t)dt=B \qquad (3)$$

$$u=u(t)\in U=\{u=u(t)\in L_2^r([t_0,T]):u(t)\in V, s.b.\ t\in[t_0,T]\}, \qquad (4)$$

burada x-sistemin vəziyyətini xarkterizə edən n ölçülü vüktor funkiyadır;u-r-ölçülü idarəedici funksiyadır; V-E^r -də qabarıq,qapalı və məhdud çoxluqdur. Bunlarla yanaşı aşağıdakı kəmiyyətlər verilmişdir: f-n ölçülü funksiya:U-L_2^r $[t_0,T]$-də çoxluq, Φ(x)-birölçülü funksiya; t_0,T-ədədlər; K(t)–(n×n) tərtibli matris funksiya; B-n ölçülü sabit vektordur. Bildiyimiz kimi,(2) tənliyini ödəyən x(t) həlli aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(x,u,\tau)d\tau \qquad (5)$$

Bu tənliyin hər iki tərəfini K(t)-yə vurub, t_0-dan T-yə qədər inteqrallayıb, x_0-ı tapaq.

$$\int_{t_0}^{T} K(t)x(t)dt=\int_{t_0}^{T} K(t)\, x_0\, dt+\int_{t_0}^{T} K(t)\int_{t_0}^{t} f(x,u,\tau)d\tau\, dt$$

$$x_0=\Big(\int_{t_0}^{T} K(t)dt\Big)^{-1}\int_{t_0}^{T} K(t)x(t)dt-\Big(\int_{t_0}^{T} K(t)dt\Big)^{-1}\int_{t_0}^{T} K(t)\int_{t_0}^{t} f(x,u,\tau)d\tau\, dt$$

(6)

(3) və (6) düsturlarını (5)-də nəzərə alaq:

$$x(t)=\Big(\int_{t_0}^{T} K(t)dt\Big)^{-1}B-\Big(\int_{t_0}^{T} K(t)dt\Big)^{-1}\int_{t_0}^{T} K(t)\int_{t_0}^{t} f(x,u,\tau)d\tau\, dt+\int_{t_0}^{t} f(x,u,\tau)d\tau$$

(7)

$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau=K(t)$ *ifadəsini (7) düsturunun sağ tərfindəki ikinci*

həddə yerinə yazaq.

$$\int_{t_0}^{T}\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau\int_{t_0}^{t} f(x,u,\tau)d\tau\, dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau\int_{t_0}^{t} f(x,u,\tau)\Big|_{t_0}^{T} dt-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau\, f(x,u,\tau)dt=$$

$$=\int_{t_0}^{T} K(t)dt\int_{t_0}^{T} f(x,u,t)dt-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau\, f(x,u,\tau)dt$$

Bunu (7)-də nəzərə alaq.

$$x(t)=\Big(\int_{t_0}^{T} K(t)dt\Big)^{-1}B-\Big(\int_{t_0}^{T} K(t)dt\Big)^{-1}\Big[\int_{t_0}^{T} K(t)dt\int_{t_0}^{T} f(x,u,t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau\, f(x,u,t)dt\Big]+$$

$$+\int_{t_0}^{t} f(x,u,\tau)d\tau = \left(\int_{t_0}^{T} K(t)dt\right)^{-1} B - \int_{t_0}^{T} f(x,u,\tau)dt +$$

$$+\left(\int_{t_0}^{T} K(t)dt\right)^{-1} \int_{t_0}^{T} \int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau\, f(x,u,t)dt + \int_{t_0}^{t} f(x,u,\tau)d\tau =$$

$$=\left(\int_{t_0}^{T} K(t)dt\right)^{-1} B - \int_{t_0}^{T} f(x,u,\tau)d\tau + \int_{t_0}^{T} \tilde{K}^{-1}(T)\, \tilde{K}(t)\, f(x,u,t)dt$$

Fərz edilir ki, $\det[\int_{t_0}^{T} K(t)dt] \neq 0$ *və*

$$\tilde{K}^{-1}(T) = \left(\int_{t_0}^{T} K(t)dt\right)^{-1}, \quad \tilde{K}(t) = \int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau$$

işarə edək.

Baxılan (2)-(3) məsələsi aşağıdakı kimi inteqral tənliyə gətirilir:

$$x(t,u) + \tilde{K}^{-1}(T)B - \int_{t_0}^{T} f(x,u,\tau)d\tau + \int_{t_0}^{T} \tilde{K}^{-1}(T)\, \tilde{K}(t) f(x,u,t)dt$$
(8)

[t_0, T*] parçasını* $\{t_i\ i=\overline{0,N}\}$*:* $t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ *nöqtələrin köməyi ilə N hissəyə bölək. (1)-(4) optimal idarəetmə məsələsinin fərq approksimasiyasının analoquna baxaq:*

$$I_N([u]_N) = \Phi([u]_N) \to \inf, \qquad (9)$$

$$x_i = \tilde{K}^{-1}(T)B - \sum_{i=k}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x_i, u_i, t)dt + \sum_{i=k}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{K}^{-1}(T)\, \tilde{K}(t)\, f(x_i\, u_i, t)dt,$$
(10)

i=1,2,...,N-1, $\qquad x_0 = \tilde{K}^{-1}(T)B \qquad$ *(11)*

$[u]_N \in U_N$ ={$[u]_N$ =($u_0, u_1, ..., u_{N-1}$): $u_i \in V$, $i=\overline{0,N-1}$},
(12)

burada $[x([u]_N)]_N = x_1[u]_N), ..., x_N([u]_N))$- $[u]_N$ idarəetməsinə uyğun

(10) məsələsinin həllidir.

$[u]_N = (u_0, u_1, ..., u_{N-1}), [v]_N = (v_0, v_1, ..., v_{N-1})$ diskret idarəetmə

funksiyalarının $\langle [u]_N, [v]_N \rangle_{L_{2N}} = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i \langle u_i, v_i \rangle_{E^r}$

skalyar hasilindən və

$$\|[u]_N\|_{L_{2N}} = (\langle [u]_N, [u]_N \rangle)^{1\backslash 2} = (\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i \,|u_i|^2_{E^r})^{1\backslash 2}$$

normasından ([15]) təkil olunmuş fəzanı L^r_{2N} ilə işarə edək. L^r_{2N} fəzası [t_0,T] parçasının {t_i $i=\overline{0,N}$} bölgüsünə uyğun L^r_{2N} [t_0,T]

fəzasının fərq analoqudur.

Beləliklə, hər bir tam $N \geq 1$ və [t_0,T] parçasının {t_i $i=\overline{0,N}$}

bölgüsü üçün L^r_{2N} [t_0,T] fəzasında baxılan (1)-(4) məsələsi L^r_{2N}

fəzasında baxılan (9)-(12) diskret optimal idarəetmə məsələsinə

uyğundur.Fərz edək ki, hər bir $N \geq 1$ və verilmiş {t_i $i=\overline{0,N}$} bölgüsü

üçün hər hansı minimallaşdırma metodunun köməyi ilə (9)

funksionalın (10),(11),(12) şərtləri daxilində I_N aşağı sərhədin
$I_N + \varepsilon_N$ təqribi qiyməti və $[u]_N = (u_{0\varepsilon}, ..., u_{N-1,\varepsilon})$; $u_{i\varepsilon} \in V$,

$i=\overline{0,N-1}$ iskret idarəetməsi alınmışdır ki,

$$I_{N*} \leq I_{N}([u]_{N\in}) \leq I_{N*} + \varepsilon_{N}, \qquad (13)$$

burada $\{\varepsilon_N\}$ *sıfra yığlan müsbət ardıcıllıqdır.*

Əgər $\{t_i\; i=\overline{0,N}\}$ *bölgüsünün addımını mıhdudiyyət qoymadan kiçiltsek, yəni*

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\leq i\leq N-1} \Delta t_i = 0,$$

onda belə bir sualı araşdıraq; $\{I_{N*}\}$ *ardıcıllığının (1) funksionalının* J_* *aşağı sərhəddinə (2),(3),(4) şərtləri daxilində yığılıacaqmı?*

Bu buraxılış işində yuxarıda qoyulan sualın cavabı araşdırılır.

§ 2. Köməkçi faktlar

$\{I_{N*}\}$ *ardıcıllığın (1) funksionalının* J_* *aşağı sərhəddinə (2),(3),(4) şərtləri daxilində yığılacağanı araşdırmaq üçün (2)-(3) və (10)-(11) məsələlərinin həllinin bəzi xüsusiyyətlərinə baxaq.*

Aşağıdakı işarəmələri edək;

$$\tilde{K}^{-1}_{\max} = \| \tilde{K}^{-1}(T) \|,$$

$$\tilde{K}_{\max} = \sup_{t_0 \leq t\leq T} \| \tilde{K}(t) \|, \; f_{\max} = \max_{t_0 \leq t\leq T} | f(0,0,t) |$$

Lemma1. *Fərz edək ki, W-*L_2^r [t_o,T]*-dən olan ixtiyari məhdud çoxluqdursa, yəni*

$$\sup_{u \in W} \| u \|_{L_2} \leq R \leq \propto$$

və

$$L(T-t_o)(1+\tilde{K}_{\max}^{-1}\,\tilde{K}_{\max}) < 1,$$

onda

$$\sup_{u \in W^t} \max_{t_o \leq t \leq T} |\, x(t,u) \,| \leq C_o \qquad (14)$$

burada

$$C_o = \frac{\tilde{K}_{\max}^{-1} B + (L(T-t_0)^{1\backslash 2} R + f_{\max}(T-t_0))(1+\tilde{K}_{\max}^{-1}\,\tilde{K}_{\max})}{1 - L(T-t_0)(1+\tilde{K}_{\max}^{-1}\,\tilde{K}_{\max})}$$

İsbatı. *(2)(3) məsələsini həllinin təyininə görə (8) düsturu doğrudur. Aydındır ki, aşağıdakı bərabərsizlik ixtiyari t üçün* $t_o \leq t \leq T$ *doğrudur:*

$$|\, x(t,u) \,| \leq | \; \tilde{K}^{-1}(T)B - \int_t^T f(x,u,\tau)d\tau + \int_{t_0}^T \tilde{K}^{-1}(T)\,\tilde{K}(t)\, f(x,u,t)\,dt |$$

Aydındır ki,

$$|\int_t^T f(x)dx\,| \leq \int_t^T |\, f(x) \,|\, dx, \qquad (15)$$

bərabərsizliyi $t \leq T$ *olduqda həmişə doğrudur.Digər tərəfdən*

$$|f(x,u,t)| \le |f(x,u,t)-f(0,0,t)+f(0,0,t)| \le L(|x|+|u|)+\sup_{t_0 \le t \le T}|f(0,0,t)|,$$

$$(x,u,t) \in E^n \times E^r \times [t_0,T] \qquad (16)$$

olduqundan, bunları və (15)-i nəzərə almaqla, x(t,u) həli üçün

aşağıdakı qiymətləndirməni alarıq:

$$|x(t,u)| \le \tilde{K}^{-1}_{\max} B+\int_{t_0}^{T} |f(x,u,t)-f(0,0,t)+f(0,0,t)|dt+$$
$$\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}\int_{t_0}^{T} |f(x,u,t)-f(0,0,t)+f(0,0,t)|dt=\tilde{K}^{-1}_{\max}B+$$
$$+\int_{t_0}^{T} |f(x,u,t)-f(0,0,t)|dt+\int_{t_0}^{T} |f(0,0,t)|dt+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}\int_{t_0}^{T} |f(x,u,t)-$$
$$-f(0,0,t)|dt+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}\int_{t_0}^{T} |f(0,0,t)| \le \tilde{K}^{-1}_{\max}B+L\int_{t_0}^{T} (|x|+|u|)dt+$$
$$+f_{\max}(T-t_0)+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}L\int_{t_0}^{T} (|x|+|u|)dt+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}f_{\max}(T-t_0)$$

Eyni olan həddləri qruplaşdıraq, lemmanın və

$$\int_{t_0}^{T} u(t)\nu(t)dt \le \left(\int_{t_0}^{T} |u(t)|^2 dt\right)^{1\backslash 2}\left(\int_{t_0}^{T} |\nu(t)|^2 dt\right)^{1\backslash 2} \qquad (17)$$

şərtindən istifadə edək.

$$|x(t,u)| \le \tilde{K}^{-1}_{\max}B+L\int_{t_0}^{T} |u(t)|dt+L\int_{t_0}^{T} |u(t)|dt+$$
$$+(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})f_{\max}(T-t_0)+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}L\int_{t_0}^{T} |x(t,u)|dt+$$

$$+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}L\int_{t_0}^{T}|u(t)|dt=\tilde{K}^{-1}_{\max}B+(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})L\int_{t_0}^{T}|x(t,u)|dt+$$

$$+(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})L\int_{t_0}^{T}|u(t)|dt+(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})f_{\max}(T-t_0)\leq$$

$$\leq\tilde{K}^{-1}_{\max}B+(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})L\int_{t_0}^{T}|x(t,u)|dt+$$

$$+(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(L(T-t_0)^{1\backslash 2}R+f_{\max}(T-t_0))$$

Nəhayət alırıq ki,

$$|x(t,u)|\leq\tilde{K}^{-1}_{\max}B+(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})L\int_{t_0}^{T}|x(t,u)|dt+$$

$$+(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(L(T-t_0)^{1\backslash 2}R+f_{\max}(T-t_0)) \qquad (18)$$

(18) düsturunun hər iki tərəfini t_0 dan T-yə qədər inteqrallayaq,

qruplaşdıraq və $\int_{t_0}^{T}|x(t,u)|dt$ *– ni tapaq.*

$$\int_{t_0}^{T}|x(t,u)|dt\leq\tilde{K}^{-1}_{\max}B(T-t_0)+L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})\int_{t_0}^{T}|x(t,u)|dt+$$

$$+(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_0)^{1\backslash 2}R+f_{\max}(T-t_0)),$$

$$[1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})]\int_{t_0}^{T}|x(t,u)|dt\leq\tilde{K}^{-1}_{\max}B(T-t_0)+$$

$$+(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_0)^{1\backslash 2}R+f_{\max}(T-t_0)).$$

$$L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})<1$$

olduğundan $\int_{t_0}^{T} |\, x(t,u) \,|$ *dt üçün aşağıdakı qiymətləndirmənialarıq:*

$$\int_{t_0}^{T} |\, x(t,u) \,| \le$$

$$\le \frac{\tilde{K}^{-1}_{\max} B(T-t_0) + (T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_0)^{1\backslash 2} R + f_{\max}(T-t_0))}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})} \qquad (19)$$

qiymətləndirilməsini (18)-də yerinə yazaq və hesablayaq.

$$|\, x(t,u) \,| \le \tilde{K}^{-1}_{\max} B +$$

$$+ \frac{L(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(\tilde{K}^{-1}_{\max} B(T-t_0) + (T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_0)^{1\backslash 2} + f_{\max}(T-t_0))}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})} +$$

$$+(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_0)^{1\backslash 2} + f_{\max}(T-t_0)) =$$

$$= \frac{\tilde{K}^{-1}_{\max} B - K_{\max} BL(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}) + \tilde{K}_{\max} BL(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})} +$$

$$+ \frac{(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})^2 L(T-t_0)^{1\backslash 2} f_{\max}(T-t_0))}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})} +$$

$$+\frac{(1+\tilde{K}_{\max}^{-1}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_0)^{1\backslash 2}+f_{\max}(T-t_0))}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}_{\max}^{-1}\tilde{K}_{\max})}-$$

$$-\frac{(1+\tilde{K}_{\max}^{-1}\tilde{K}_{\max})^2 L(T-t_0)(LR\ (T-t_0)^{1\backslash 2} f_{\max}(T-t_0))}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}_{\max}^{-1}\tilde{K}_{\max})}$$

Beləliklə, alarıq ki,

$$|\ x(t,u)\ |\ \leq\ \frac{\tilde{K}_{\max}^{-1} B+(LR\ (T-t_0)^{1\backslash 2} f_{\max}(T-t_0))(1+\tilde{K}_{\max}^{-1}\tilde{K}_{\max})}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}_{\max}^{-1}\tilde{K}_{\max})}$$

Bununla da lemma 1 isbat olunur.

Lemma 2. *Tutaq ki, lemma 1-i şərtləri ödənilir.Onda*

$$\sup_{u\in W}|\ x(t,u)-x(\tau,u)\ |\ \leq C_1\ |\ t-\tau\ |^{1\backslash 2},\ t_0\leq t,\qquad \tau\leq T, \tag{20}$$

burada

$$C_1=LC_0(T-t_0)^{1\backslash 2}+LR+f_{\max}(T-t_0)^{1\backslash 2}$$

C_0 sabiti (14) münasibətindən təyin olunur.

İsbatı. *Həqiqətən (14) qiymətləndirilməinin köməyi lə ixtiyari $t,\tau\in[t_0,T]$ $u\in W$ üçün (8) münasibətindən alırıq ki,*

$$x(t,u)=\tilde{K}^{-1}(T)B-\int_t^T f(x,u,s)ds+\int_{t_0}^T \tilde{K}^{-1}(T)\tilde{K}(t)$$
$f(x,u,s)ds,$

$$x(\tau,u)=\tilde{K}^{-1}(T)B-\int_\tau^T f(x,u,s)ds+\int_{t_0}^T \tilde{K}^{-1}(T)\tilde{K}(t)$$
$f(x,u,s)ds,$

Bu iki funksiyaların fərqinin mütləq qiymətini hesablayaq.

$$|x(t,u)-x(\tau,u)|=|\tilde{K}^{-1}(T)B-\int_t^T f(x,u,s)ds+\int_{t_0}^T \tilde{K}^{-1}(T)K(t)-$$

$$-f(x,u,s)ds-\tilde{K}^{-1}(T)B+\int_\tau^T f(x,u,s)ds-\int_{t_0}^T \tilde{K}^{-1}(T)\tilde{K}(t)f(x,u,s)ds|=$$

$$=\left|\int_\tau^T f(x,u,s)ds\right|$$

Lemma1,(16),(17) şərtlərindən istifadə edək, düsturda nəzərə alaq.

$$|x(t,u)-x(\tau,u)|\le\int_\tau^t |f(x,u,s)-f(0,0,s)+f(0,0,s)|ds=$$

$$=\int_\tau^t |f(x,u,s)-f(0,0,s)ds|+\int_\tau^t |f(0,0,s)ds\le$$

$$\le L\int_\tau^t (|x(s,u)|+|u(s)|)ds+f_{\max}|t-\tau|\le$$

$$\le L\int_\tau^t (|x(s,u)|ds+L\int_\tau^t |u(s)|ds+f_{\max}|t-\tau|\le$$

$$\le L C_0|t-\tau|+LR|t-\tau|^{1\backslash 2}+f_{\max}|t-\tau|\le\le C_1|t-\tau|^{1\backslash 2}$$

$$\le|t-\tau|^{1\backslash 2}(L C_0|t-\tau|+LR+f_{\max}|t-\tau|^{1\backslash 2})\le C_1|t-\tau|^{1\backslash 2}$$

Beləlikə, aşağıdakı münasibətdən doğruluq alınır:

$$|x(t,u)-x(\tau,u)| \le |t-\tau|^{1\backslash 2}(L\,C_0|t-\tau|+LR+f_{\max}|t-\tau|^{1\backslash 2}) \le C_1|t-\tau|^{1\backslash 2}$$

Nəticədə lemma 2 isbat olundu

Lemma 3. $\forall\, u, v \in U$ *üçün*

$$\sup_{t_0 \le t \le T} |x(t,u)-x(t,v)|\ c_2 \| u-v \|_{L_2}, \qquad (21)$$

burada

$$C_2=(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})\,L\,(T-t_0)^{1\backslash 2}$$

İsbatı. *(8)-dən alırıq ki,*

$$x(t,u)=\tilde{K}^{-1}(T)B-\int_t^T f(x,u,\tau)dt+\int_t^T \tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}f(x,u,\tau)dt,$$

$$x(t,v)=\tilde{K}^{-1}(T)B-\int_t^T f(x,v,\tau)d\tau+\int_t^T \tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}f(x,v,\tau)dt.$$

Bu iki funksiyaların fərqinin mütləq qiymətini tapaq

$$|x(t,u)-x(\tau,v)| \le |\tilde{K}^{-1}(T)B-\int_t^T f(x,u,\tau)dt+\int_{t_0}^T \tilde{K}^{-1}(T)\tilde{K}$$
$$(t)f(x,u,t)dt-$$

$$-\tilde{K}^{-1}(T)B+\int_t^T f(x,v,\tau)d\tau-\int_{t_0}^T \tilde{K}^{-1}(T)\tilde{K}(t)f(x,v,t)dt|$$

(15),(16) $\sup\limits_{u\in W} \| u\|_{L_2} \le R < \infty$ *və Lipşist şərtlərindən istifadə edək.*

$$|x(t,u)-x(\tau,\nu)| \le \int_{t_0}^{T} |f(x,u,t)-f(x,\nu,\tau)|\, d\tau + \tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}\int_{t_0}^{T} |f(x,u,t)-$$

$$-f(x,\nu,t)|\,dt \le \le L\int_{t_0}^{T} |u-\nu|\,dt + \tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max} L\int_{t_0}^{T} |u-\nu|\,dt =$$

$$=(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})L\int_{t_0}^{T} |u-\nu|\,dt$$

Beleliklə (17) düsturunu nəzərə alsaq, aşağıdakı münasibəti alarıq;

$$|x(t,u)-x(\tau,\nu)| \le (1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})L(T-t_o)^{1\backslash 2}\| u-\nu\|_{L_2} = C_2\| u-\nu\|_{L_2}$$

Lemma 3 isbat olundu.

Lemma 4. *Tutaq ki,* $|\phi(x)-\phi(y)|\ L|x-y|, x\in E^n$ *və* $y\in E^n$

şərtini ödəyir.
Onda $L_2^r[t_o,T]$*-dən olan istənilən məhdud çoxluqda (1) funksionalı*

Lipşit şərtini ödəyir;

$$|J(u)-J(\nu)| \le C_3\| u-\nu\|_{L_2},\quad u,\nu\in W \tag{22}$$

burada

$C_3 = LC_2$

C_2 *sabit (20) münasibətindən təyin olunur.*

İsbatı. *(1) düsturundan alınır ki,*

$$J(u)=\phi(x(T,u)),$$

$$J(v)=\phi(x(T,v)),$$

Bu iki funksionallarının fərqinin mütləq qiymətini tapmaq üçün qiymətlərini yerinə yazaq, Lipşist şərtindən və (21)-dən istifadə edək.

$$|J(u)-J(v)| \le |\phi(x(T,u))-\phi(x(T,v))| \le L\,|x(T,u)-x(T,v)| \le L\,C_2\,\|u-v\|_{L_2}$$

Beleliklə, lemma 4 isbatı olundu.

Lemma 5. *Fərz edək ki,* W_N *-* L^r_{2N} *-dən olan ixtiyari məhdud çoxluqdur, yəni*

$$\sup_{[u]_N \in W_N} \|[u]_N\|_{L_{2N}} \le R \le \infty, \text{ bundan əlavə}$$

$$L(T-t_o)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})<1$$

və

$$d_N=\sup_{[u]_N \in W_N}\ \max_{o\le i\le N} \Delta t_i \le \frac{(T-t_0)}{N}. \qquad (23)$$

onda

$$\sup_{[u]_N \in W_N}\ \max_{o\le i\le N} |x_i([u]_N)| \le C_4 \qquad (24)$$

burada

$$C_4=\frac{\tilde{K}^{-1}_{\max}B+(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR\,(T-t_0)^{1\backslash 2}+f_{\max}(T-t_0))}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})}$$

İsbatı. *(10) bərabərliyində*

$$\left|\sum_{i=0}^{N-1} f(t)\right| \le \left|\sum_{i=0}^{N-1} f(t)\right| \qquad (25)$$

və (16) şərtini nəzərə alsaq

$$|x_i| = \left|\tilde{K}^{-1}_{\max} B - \sum_{i=k}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} f(x_i, u_i, t)dt + \sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} f(x_i, u_i, t)dt \times \tilde{K}^{-1}(T)\,\tilde{K}^{-1}(t)\right|$$

$$\le \tilde{K}^{-1}_{\max} B + \sum_{i=k}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} |f(x_i, u_i, t)|\, dt + \sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} \left|\tilde{K}^{-1}(T)\|\,\tilde{K}^{-1}(t)\|\, f(x_i, u_i, t)dt\right|$$

$$\le \tilde{K}^{-1}_{\max} B + \sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} |f(x_i, u_i, t) - f(0,0,t) + f(0,0,t)|\, dt +$$

$$+ \tilde{K}^{-1}_{\max}\,\tilde{K}_{\max}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} |f(x_i, u_i, t) - f(0,0,t) + f(0,0,t)|\, dt =$$

$$= \tilde{K}^{-1}_{\max} B + \sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} |f(x_i, u_i, t) - f(0,0,t)|\, dt + \sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} |f(0,0,t)|\, dt +$$

$$+ \tilde{K}^{-1}_{\max}\,\tilde{K}^{-1} + L\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} |f(x_i, u_i, t) - f(0,0,t)|\, dt +$$

$$+ \tilde{K}^{-1}_{\max}\,\tilde{K}^{-1}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} |f(0,0,t)|\, dt \le$$

$$\le \tilde{K}^{-1}_{\max} B + L\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} (|x_i| + |u_i|)dt + f_{\max}(T - t_o) +$$

$$+ \tilde{K}^{-1}_{\max}\,\tilde{K}^{-1} + L\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} (|x_i| + |u_i|)dt + \tilde{K}^{-1}_{\max}\,\tilde{K}_{\max} f_{\max}(T - t_o)$$

qiymətləndiməsini alarıq.

Lemma 5-in şərtlərini, (17)-ni də nəzərə alaq və burada

$$|x_i| = \tilde{K}^{-1}_{\max} B + L\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} |x_i|\,dt + L\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} |u_i|\,dt +$$

$$+ (1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}) + f_{\max}(T-t_o) + \tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max} L\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} |x_i|\,dt +$$

$$+ \tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max} L\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} |u_i|\,dt + \tilde{K}^{-1}_{\max} B + (1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}) L$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} |x_i|\,dt +$$

$$+ (1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}) L\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} |u_i|\,dt + (1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}) f_{\max}(T-t_o)$$

$$\leq$$

$$\leq \tilde{K}^{-1}_{\max} B + (1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}) L\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i |x_i|\,dt +$$

$$+ (1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(L(T-t_o)^{1\backslash 2}\|u\|_{L_{2N}} + f_{\max}(T-t_o) \leq \tilde{K}^{-1}_{\max} B +$$

$$+ (1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}) Ld_n \sum_{i=0}^{N-1} |x_i|\,dt + (1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_o)^{1\backslash 2}$$

$$+$$

$$+ f_{\max}(T-t_o))$$

alarıq.

Beləliklə alırıq ki,

$$|x_i| \le \tilde{K}^{-1}_{\max} B + (1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}) L d_n \sum_{i=0}^{N-1} |x_i| +$$

$$+(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_o)^{1\backslash 2} + f_{\max}(T-t_o)). \qquad (26)$$

(26) düsturunun hər iki tərəfini sıfırdan (N-1)-ə qədər cəmləyək

qruplaşdıraq və $\sum_{i=0}^{N-1} |_i \; x_i|$ *-i tapaq.*

$$\sum_{i=0}^{N-1} |x_i| \le \tilde{K}^{-1}_{\max} BN + (1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}) L \frac{(T-t_0)N}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |x_i| +$$

$$+N(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_o)^{1\backslash 2} + f_{\max}(T-t_o)),$$

$$[1-L(T-t_o)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})] \sum_{i=0}^{N-1} |x_i| \le \tilde{K}^{-1}_{\max} BN +$$

$$+N(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_o)^{1\backslash 2} + f_{\max}(T-t_o)),$$

$$1-L(T-t_o)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})<1$$

olduğundan $\sum_{i=0}^{N-1} |x_i|$ *üçün*

$$\sum_{i=0}^{N-1} |x_i| \le \frac{\tilde{K}^{-1}_{\max} BN + N(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_0)^{1\backslash 2} + f_{\max}(T-t_0))}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})}$$

(27)

qiymətləndirməsini alarıq. (27) qiymətləndirməsini (26)-da yerinə *yazaq və sadələşdirməni aparaq.*

$$|x_i| \leq \tilde{K}^{-1}_{\max} B+$$

$$\frac{(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})L\frac{(T-t_0)}{N}(\tilde{K}^{-1}_{\max}BN+N(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_0))^{1\backslash 2}}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})}+$$

$$+\frac{f_{\max}(T-t_0))}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})}+(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_o))^{1\backslash 2} f_{\max}(T-t_o))=$$

$$=\frac{\tilde{K}^{-1}_{\max}B-\tilde{K}^{-1}_{\max}BL(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})+\tilde{K}^{-1}_{\max}BL(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})}+$$

$$+\frac{L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})^2(LR(T-t_0))^{1\backslash 2}+f_{\max}(T-t_0))}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})}+$$

$$+\frac{(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_0))^{1\backslash 2}+f_{\max}(T-t_0))}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})}$$

$$-\frac{L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})^2(LR(T-t_0))^{1\backslash 2}+f_{\max}(T-t_0))}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})}$$

Beləliklə alırlıq ki,

$$|x_i| \le \frac{\tilde{K}^{-1}_{\max} B + (1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})(LR(T-t_0)^{1\backslash 2} f_{\max}(T-t_0))}{1-L(T-t_0)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})}$$

Lemma 5 isbat olundu.

(1)-(4) və (9)-(12) məsələləri arasında əlaqələrin tədqiqi üçün biz aşağıdakı Q_N və P_N inikasları təyin etməliyik: $L_2^r[t_o,T]$ fəzasında L_{2N}^r-ə təsir edən Q_N inikası

$$Q_N(u)=(u_0,u_{-1},...,u_{N-1}):\ u_i=\frac{1}{\Delta t_i}\int_{t_i}^{t_i+1} u(t)dt \qquad ,i=\overline{0,N-1} \qquad (28)$$

kimi təyin olunur və L_{2N}^r-dən L_2^r $[t_o,T]$-yə təsir edən P_N inikası isə

$$P_N([u]_N)=u_i, \qquad t_i<t<t_{i+1}, \qquad i=\overline{0,N-1} \qquad (29)$$

kimi təyin olunur.Onda (28) və (29)-dan alınır ki,

$$\|Q_N(u)\|^2_{L2N}=\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{1}{\Delta t_i}\int_{t_i}^{t_i+1} u(t)dt\right)^2 \Delta t_i=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{\Delta t_i}\left(\int_{t_i}^{t_i+1} u(t)dt\right)^2 \le$$

$$\le\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1}|u(t)|^2 dt \le \int_{t_0}^{T}|u(t)|^2 dt=\|u\|^2_{L2}, \qquad (30)$$

$$\|P_N[u]_N\|^2_{L2}=\int_{t_0}^{T}|(P_N[u]_N)|^2 dt=\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1}|u_i|^2 dt=$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}\Delta t_i |u_i|^2 dt=\|[u]_N\|^2_{L2N}$$

(31)

Q_N və P_N inikasların xassələri ilə əlaqədar bəzi lemmaları isbat

edək.

Lemma 6. *Tutaq ki, f funksiyası öz arqumentlərinin küllüsünə görə kəsilməzdir və Lipşist şərtini ödəyir:*

$$|f(x+\Delta x,u+h,t)-f(x,u,t)| \le L(|\Delta x|+|h|),$$

ixtiyari $(x+\Delta x,u+h,t),(x,u,t)\in E^n \times E^r \times [t_o,T], L=const\ge 0$

$[t_o,T]$ *parçasında* $\{t_i,\ i=\overline{0,N}\}$ *bölgüsü (23) şərtini ödəyir. Fərz edək ki,* W *və* W_N - $L_2^r[t_o,T]$ *və* L_{2N}^r *-dən ixtiyari məhdud çoxluqlardır, yəni*

$$\sup_{W}\|u\|_{L2}=R<\infty \qquad \sup_{W_N}\|[u]\|_{L_{2N}}\le R\le\infty$$

Bundan başqa

$$L(T-t_o)(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})<1$$

onda

$$\sup_{u\in W}\ \max_{o\le i\le N-1}|x(t_i,u)-x_i(Q_N(u))|\le\delta_N, \tag{32}$$

$$\sup_{[u]N\in WN}\ \max_{o\le i\le N-1}|x(t_i\ P_N([u]_N))-x_i([u]_N))|\le\delta_N, \tag{33}$$

burada

$$\delta_N=(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})L\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1}\sup(|x(\tau,u)-x(t_i,u)|+$$

$$+|x(t_i,u)-x_i|)d\tau\to 0 \qquad N\to\infty \tag{34}$$

İsbatı. *İxtiyari* $u\in L_2^r[t_o,T]$ *və* $[u]_N\in L_{2N}^r$, $\|u\|_{L2}\le R$, $\|[u]_N\|_{L2N}\le R<\infty$ *və (2)-(3) və (10)-(11) həllərinə uyğun* $x(t,u)$ *və* $[x([u]_N)]_N$ *götürək (8) və (10) bərabərliklərindəm alınır ki,*

$$|x(t_i,u)-x_i([u]_N)| = |\tilde{K}^{-1}(T)B-\int_t^T f(x,u,\tau)d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^T \tilde{K}^{-1}(T)\tilde{K}(t)f(x,u,t)dt-\tilde{K}^{-1}(T)B+$$

$$+\sum_{i=k}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} f(x_i,u_i,t)dt-\sum_{i=k}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1}\tilde{K}^{-1}(T)\tilde{K}(t)f(x_i,u_i,t)dt| =$$

$$|-\sum_{i=k}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} f(x,u,t)dt+\sum_{i=k}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1}\tilde{K}^{-1}(T)\tilde{K}(t)f(x,u,t)dt+$$

$$+\sum_{i=k}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1} f(x_i,u_i,t)dt-\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1}\tilde{K}^{-1}(T)\tilde{K}(t)f(x_i,u_i,t)dt|$$

Burada (16),(25) və Lipşist şərtlərini nəzərə alaq, $x(t_i,u)$ *həddini əlavə edək, sonra çıxaq və eyni olan həddləri qruplaşdıraq. Onda*

$$|x(t_i,u)-x_i([u]_N)| \le \sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1}|f(x,u,t)-f(x_i,u_i,t)|dt+$$

$$+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1}|f(x,u,t)-f(x_i,u_i,t)|dt=$$

$$=(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_i+1}|f(x,u,t)-f(x_i,u_i,t)|dt\le$$

$$\le(1+\tilde{K}^{-1}_{\max}\tilde{K}_{\max})L\sum_{j=0}^{i}\int_{t_j}^{t_j+1}(|x-x_j|+|u-u_j|d\tau =$$

$=(1+\tilde{K}_{\max}^{-1}\tilde{K}_{\max})L\sum_{j=0}^{i}\int_{t_j}^{t_j+1}[|x(\tau,u)-x_j+x(t_j,u)|+|u(\tau)-u_j|]d$
$\tau=$

$=(1+\tilde{K}_{\max}^{-1}\tilde{K}_{\max})L\sum_{j=0}^{i}\int_{t_j}^{t_j+1}(|x(\tau,u)-x(t_j,u)|+|x(t_j,u)-|x_j|)$
$d\tau+$

$+(1+\tilde{K}_{\max}^{-1}\tilde{K}_{\max})L\sum_{j=0}^{i}\int_{t_j}^{t_j+1}|u(\tau)-u_j|\,d\tau,\qquad i=\overline{0,N-1}$

Burada (34) bərabərliyini yerinə yazaq

$|x(t_i,u)-x_i([u]_N)|=$
$=\delta_N+(1+\tilde{K}_{\max}^{-1}\tilde{K}_{\max})L\sum_{j=0}^{i}|\int_{t_j}^{t_j+1}(u(\tau)-u_j)dt|,\qquad i=\overline{0,N-1}$
(35)

bütün u, $[u]_N$, $\|u\|_{L2}\le R$, $\|u\|_{L2N}\le R$. Lakin əgər $\|u\|_{L2}\le R$,

onda (30)-a görə $\|Q_N(u)\|_{L2N}\le R$. Ona görə də $[u]_N=Q_N(u)$ üçün

(35)-də

$\int_{t_j}^{t_j+1}(u(\tau)-Q_N(u))dt=0,\ j=\overline{0,N-1}$ *nəzərə alsaq, (32)*

qiymətləndirilməsini alarıq. Analoji olaraq, əgər $\|[u]_N\|_{L2N}\le R$,

onda (31) uyğun olaraq, $P_N\|([u]_N)\|_{L2}\le R$,
Ona görə də $u=P_N([u]_N)$ üçün (35)-də $\int_{t_j}^{t_j+1}(P_N([u]_N)-u_j)\,d\tau=0$,
$j=\overline{0,N-1}$ nəzərə alsaq, (33) qiymətləndirilməsini alarıq. Lemma 6

isbat olundu.

Lemma 7. *Tutaq ki, lemma 6-nın bütün şərtləri yerinə yetirilir.*

Fərz edək ki, Φ funksiyası kəsilməzdir və Lipşist şərtini ödəyir:

$$|\ \Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\ \leq L|\ \Delta x|$$

$(x+\Delta x,u,t)$, $(x,u,t)\in E^n\times E^r\times[t_o,T]$, $L=const\geq 0.$

$u=u(t)$-W-də istənilən idarəetmədir. Onda

$$|\ I_N(Q_N(u))-J(u)\ |\ \leq C_5\,\delta_N, \tag{36}$$

burada

$C_5=L$

və δ_N kəmiyyəti (34) münasibətindən təyin olunur.

İsbatı. *(10) və (9) ifadələrinin fərqinin mütləq qiymətlərini tapmaq üçün qiymətlərini yerinə yazıb, Lipşist və (32) şərtlərindən istifadə edək.*

$$|\ I_N(Q_N(u))-J(u)\ |\ =|\ \Phi(x_N(Q_N(u))-\Phi(x(t,u))\ |\ \leq L|\ X_N(Q_N(u))\ -$$

$$-x(T,u)\ |\ \leq C_5\,\delta_N$$

Nəticədə lemma 7 isbat olundu.

Lemma 8. *Tutaq ki, lemma 7 bütün şərtləri ödəyir.*

$[u]_N$-W_N - də istənilən idarəetmədir. Onda

$$|\ J(P_N([u]_N))-I_N([u]_N)\ |\ \leq C_5\,\delta_N \tag{37}$$

Burada $C_6=L$

və δ_N kəmiyyəti (34) münasibətindən təyin olunur.

İsbatı. *(1) və (9) ifadələrinin fərqinin mütləq qiymətlərini tapmaq üçün qiymətlərini yerinə yazıb, Lipşist və (33) şərtlərindən istifadə edək.*

$$|J(P_N([u]_N))-I_N([u]_N)| = |\Phi(x_N(T,P_N([u]_N)) - \Phi(x_N([u]_N))| \le$$

$$\le L|x(T,P_N([u]_N))- x_N([u]_N)| \le C_5\delta_N$$

Beləliklə, lemma 8 isbat olundu.

Lemma 9. *(bax.[15]) Tutaq ki, V - E^r - də qabarıq və qapalı çoxluqdur, u=u(t) idarəetməsi isə $L_2^r[t_o,T]$ və $u(t)\in V$ sanki bütün $[t_o,T]$ parçasında təyin olunub.*

Onda ixtiyari $t_i, t_{i+1} \in [t_o,T]$, $t_i < t_{i+1}$ üçün

$$u_i = \frac{1}{\Delta t_i}\int_{t_i}^{t_i+1} u(t)dt \in V$$

münasibəti doğrudur.

İsbatı. *Əvvəlcə müəyyənləşdirək ki, E^r-də istənilən qabarıq, qapalı V çoxluğu V-ni saxlayan və V çoxluğunun bütün mümkün dayaq hipermüstəvilərdən təşkil olunmuş yarımfəzalarıların kəsilməsidir (bax.[13]dəki 4.5.2 tərifinə). V çoxluğunun ixtiyari v sərhəd nöqtəsini götürək. Tutaq ki, c_v - v nöqtəsində V çoxluğunun dayaq vektorudur, yəni*

$\forall\, u\in V$ *üçün* $c_v \ne 0$ *və* $< c_v, u-v >\ge 0$.

$$W=\bigcap_{u\in \Gamma_P V}\{u: < c_v ,u-v >\geq 0\}$$

işarə edək, burada $\Gamma_P V$ *ilə* V *çoxluğunun sərhəd nöqtələri çoxluğu işarə edilmişdir. Göstərmək lazımdır ki,* $W=V$. *Əgər* $u\in V$, *onda bütün* $v \in \Gamma_P V$ *üçün* $< c_v ,u-v >\geq 0$, *ona görə də* $u\in W$. *Nu o deməkdir ki,* $V\subseteq W$ *doğru olduğunu göstərək. Əksini fərz edək. Tutaq ki,* $W \subseteq V$ $w\in W$ *nöqtəsi var. Lakin* $w\notin V$ *onda [23]-ə görə* V *çoxluğu ilə* w *nöqtəsi* $< c_v ,u-v >=0$ *hipermüstəvi ilə güclü ayrılandır, burada* $v \notin P_V (w)$- w *nöqtəsinin* V *çoxluğuna proyeksiyasıdır və bu xassələrə malikdir:* $\forall\, u\in V$ *üçün* $< c_v ,u-v >\geq 0$, $< c_v , w -v ><0$. *Lakin bele ki,* $w\in \Gamma_P V$ *və* $w\in W$, *onda* W *çoxluğunun təyininə görə* $< c_v , w -v >\geq 0$. *Ziddiyyət alınır.Beləliklə,* $W\subseteq V$. *Tələb olunan* $W=V$ *bərabərliyi isbat olundu Lemma 9-un şərtini ödəyən istənilən* $u=u(t)$ *idarəetməsini götürək. Tutaq ki,* v - $\Gamma_P V$ *-də ixtiyari nöqtədir.* c_v -v *nöqtəsində* V*-yə dayaq vektorudur. Onda* $< c_v ,u(t)- v >\geq 0$ *sanki bütün* $[t_o ,T]$*-də təyin olunub. Buberabərsizlik* $[t_i ,t_{i+1}]$ *parçasında inteqralasaq, bütün* $v \in \Gamma_P V$ *üçün*

$$\frac{1}{\Delta t_i}\int_{t_i}^{t_i+1} < c_v ,u(t) >dt=< c_v , \frac{1}{\Delta t_i}\int_{t_i}^{t_i+1} u(t)dt>=< c_v ,u_i >\geq< c_v\, v >$$

yaxud $< c_v , u_i -v >\geq$ *alarıq. Beləliklə,* $u_i \in W=V$.

Lemma 9 isbat olundu.

§ 3 ƏSAS NƏTİCƏLƏR.

Lokal olmayan sərhəd şərtli optimal idarəetmə məsələsinin Approksimasiyasını öyrənmək üçün aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem. *Tutaq ki, (1)-(4) optimal idarəetmə məələində* $U_* \neq \varnothing$*, Bundan əlavə lemma 6 və lemma 7 bütn şərtləri yerinə yetirilir.* V*-*E^r *-də qabaqrıq, qapalı və məhdud çoxluqdur və* $[t_o, T]$ *parçasında* $\{t_i, i=\overline{0,N}\}$ *bölgüsü (23) şərtini ödəyir. Tutaq ki* $\{[u]_{N\varepsilon}\}$ *ardıcıllığı (13) şərtində təyin olunub.Onda*

$$\lim_{N\to\infty} I_{N*} = J_*$$

və

$$-C_6\delta_N \le I_{N*} - J_* \le C_5\delta_N, \quad N=1,2,..., \qquad (38)$$

$$0 \le J(P_N([u]_{N\varepsilon})) - J_* \le (C_5 + C_6)\delta_N + \varepsilon_N, \quad N=1,2,..., \qquad (39)$$

qiymətləndirilməri doğrudur, burada C_5, C_6 *sabitləri (36) və (37) qiymətləndirmələrdən götürülüb,* $W=U$ *və* $W_N = U_N$*,* δ_N *kəmiyyti isə (34)ünasibətindən təyin olunur.*

İsbatı. *Hər hansı* $u_* \in U_*$ *idarəetməsini götürək. Lemma 9-a əsaən* $Q_N u_* \in U_N$ *. Buradan və lemma 7-dən alınır ki,*

$$I_{N*} \le I_N Q_N(u_*)) \le J(u_*) + C_5\delta_N = J_* + C_5\delta_N, \quad N=1,2,..., \qquad (40)$$

Sonra U_N *komprakt çoxluğunda (4) funksiyası sonlu saylı dəyişənli*

$[u]_N=(u_0,...,u_{N-1})$ *özünün aşağı sərhəddini alır, yəni* $I_{N*} > -\infty$,

$U_{N*} \neq \emptyset$. *Hər hansı* $[u]_{N*} \in U_{N*}$ *idarəetməsini götürək.Bilavasitə*

(29)-dan $P_N([u]_{N*}) \in U$ *alınır. Onda lemma 8-dən alınır ki,*

$$J_* \le J(P_N([u]_{N*})) \le I_N([u]_{N*}) + C_5\,\delta_N = I_{N*} + C_5\,\delta_N,\ N=1,2,... \quad (41)$$

(40),(41) bərbərizliklərindən (38) qiymətləndirilməsi alınır.

Belə ki, lemma 6-yə əsasən $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_N=0$, *onda* $\lim\limits_{N\to\infty} I_{N*}=J_*$

(7)-dəki $\{[u]_{N\varepsilon}\}$ *ardıcıllığına baxaq. Onda* $P_N([u]_{N\varepsilon}) \in U$ *və*

$$0 \le J(P_N([u]_{N\varepsilon})) - J_* = [J(P_N([u]_{N\varepsilon})) - I_N([u]_{N\varepsilon})] +$$

$$+ [(I_N([u]_{N\varepsilon}) - I_{N*}] + [I_{N*} - J_*)], \quad N=1,2,...$$

buradan və (13),(37),(38) bərabərsizliklərindən (39)

qiymətləndirilməsi alınır. Teorem isbat olundu.

Ədəbiyyat.

1. Алексев В.М., Тихомиров В.М., Фомин СВ. Оптимальное управление.- М..: Наука, 1979.

2.Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. -М.: Наука, 1981.

3.Лубышев Ф.В. О дифференциально-разностных аппроксимациях многомерных задач оптимального управления с распределеннными в пространстве параметрами. -Дифференц. управления, 1977, 13, №4, с. 711-717.

4.Потапов М.М. Разностная аппроксимация максимальных задач для систем Гурса-Дарбу при наличии фазовых ограничений. –Вестник Московск. ун-та. Сер. вычислит, матем. и киберн., 1978, №4, с. 28-36.

5.Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.-М.: Наука,1979.