BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ
TƏTBİQİ RİYAZİYYAT VƏ KİBERNETİKA FAKULTƏSİ

«Tətbiqi Riyaziyyat» kafedrası

I kurs 370-№li qrup tələbəsi
Baxşıyev Vüqar oğlunun

«Ədədi sıralar»
mövzusundan

KURS İŞİ

KAFEDRA MÜDİRİ -akad. Qasımov M. G.
ELMİ RƏHBƏR - prof. Orucov H. D.

BAKI 2005

GİRİŞ.

Bildiyimiz kimi Riyazi analiz teoremləri onların isbatı ilə öyrənir və tətbiq sahələrini araşdırır. Riyazi analiz XVIII əsrdə yaranmış, lakin onun tam əsaslandırılması ancaq XIX əsrin sonunda Koşinin yaratdığı limit nəzəriyyəsinin köməyi ilə baş vermişdir.

Sıra riyazi analzin mühüm anlayışlarından biridir. Əvvəlcə sıra haqqında mə'lumat verək.

Tutaq ki, hər hansı ədədi ardıcıllıq verilib.

$$a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n , \dots \qquad (1)$$

Bu ədədlərdən aşağıdakı ifadəni düzəldək.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \qquad (2)$$

Bu ifadəyə sonsuz sıra deyilir. (1)-ə isə sıranın hədləri deyilir. Cəm işarəsindən istifadə etsək (2) ifadəsini aşağıdakı kimi yaza bilərik.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (3)$$

Sıranın hədlərinin nömrələnməsi ola bilər ki, 1-dən yox , sıfırdan və ya ixtiyari natural ədəddən başlansın. (3) simvoluna mə'na vermək üçün bu sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığını düzəldək.

$$A_1=a_1 , A_2=a_1 + a_2 , A_3=a_1 + a_2 + a_3 , \dots , A_n= a_1 + a_2 + a_3 + \dots +a_n + \dots$$

Sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığı

Tə'rif: *Əgər sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığının sonsuz və ya sonlu limiti varsa həmin limitə A_n sırasının cəmi deyilir. Və aşağıdakı kimi işarə olunur.*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = S$$

Onda $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Əgər S ədədi sonlu olarsa onda sıraya yığılan sıra deyilir. Əgər S ədədi +∞ və ya -∞ və yaxud da sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığının limiti yoxdursa onda A sırasına dağılan sıra deyilir.

Əgər (2) sırasında m sayda birinci toplananı atdıqdan sonra alınan

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

sırasına verilmiş sıranın m-ci həddindən sonrakı qalığı deyilir.
Teorem. *Sıranın yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt onun istənilən qalığının yığılmasıdır. Və tərsinə, əgər qalıq yığılarsa onda sıra da yığılır.*
Doğrudan da fərz edək ki, A_m sırası yığılır.

$$\alpha_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots$$

Göstərək ki, ixtiyari m üçün α_m-də yığılandır.

$$S_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}$$

Aydındır ki, $S_k = A_{m+k} - A_m$. Buradan ($k \to \infty$) limitə keçsək, $\lim_{k\to\infty} A_{m+k} = S$ və A_m –in sabit ədəd olduğunu nəzərə alsaq onda alarıq.

$$\lim_{k\to\infty} S_k = S - A_m$$

Qalıq sıranın cəmini α_m ilə işarə etsək $\alpha_m = S - A_m$. Və tərsinə əgər qalıq yığılarsa onda sıra da yığılar.
Qeyd edək ki, qalıq sıranın m-ci həddi üçün aşağıdakı doğrudur.

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m = 0$$

Teorem. *Əgər sıra yığılırsa onda onun n-ci həddinin limiti aşağıdakı kimi olur.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

İsbatı. Aydındır ki, $a_n = A_n - A_{n-1}$ (1) doğrudur. Əgər $\lim_{n\to\infty} A_n = S$ onda $\lim_{n\to\infty} A_{n-1} = S$ olmalıdır. S sonlu ədəd olduğundan (1) –dən limitə keçsək isbat aydın olar. Amma bu şərt kafi deyil.
Misal. Tutaq ki bizə $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sırası verilib. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zəruri şərt ödənir. Amma dağılan sıradır. Doğrudan da

$$A_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\,\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,.\ \lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$$ -dan aydın görünür.

Teorem: *Tutaq ki, bizə iki* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *və* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *yığılan sıraları verilmişdir. Onda* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ *sırası da yığılandır və* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *(1) doğrudur.*

İsbatı. Tutaq ki, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $S'_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ və $\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$. Onda $\sigma_n = S_n + S'_n$. Onda $\lim_{n\to\infty} S_n$ və $\lim_{n\to\infty} S'_n$ limitləri var və onda $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ limiti də var. Və

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}(S_n + S'_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} S'_n.$$

Bu isə elə (1) bərabərliyi deməkdir.

Müsbət hədli sıra anlayışı.

Tutaq ki, bizə $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) sırası verilmişdir. $a_n \geq 0$ olarsa onda (A) sırasına müsbət hədli sıra deyilir. Bəzən tərifi belə də deyirlər. $\exists$ n_0 var ki, $\forall$ $n \geq n_0$, $a_n \geq 0$ olsun onda (A) sırasına müsbət hədli sıra deyilir.

Ümumiyyətlə müsbət hədli (A) sırasının həmişə cəmi var. Əgər sıranın xüsusi cəmi yuxarıdan məhduddursa onda bu cəm sonlu olacaq (sıra yığılan olacaq). Əks halda isə cəm sonsuz olacaq (sıra dağılan olacaq).

Teorem 1. *Tutaq ki, bizə iki müsbət hədli sıra verilmişdir.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (A)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... \qquad (B)$$

Və $a_n \leq b_n$, $\forall$ $n \geq n_0$ *(1). Belə ki, müəyyən həddən sonra (1) bərabərsizliyi doğrudur. Onda (B) sırası yığılırsa (A) sırası da yığılır. (A) sırası dağılırsa onda (B) sırası da dağılır.*

İsbatı. Qeyd edək ki, məsələn (A) sırasında n_1 saydası mənfi, (B) sırasında n_2 saydası mənfi, n_3 saydası sıfır olan hədlər var. $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$ olsa onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A_{n0}$ və $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B_{n0}$ müsbət hədli sıra olacaq. A_{n0} və B_{n0} sıralarının yığılıb-dağılması (A) və (B) sıralarının yığılıb-dağılmasına ekvivalentdir. Fərz edək ki, (A) və (B) sıralarının bütün hədləri mənfi deyil. Fərz edək ki, (B) sırası yığılır. Onda $b_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$. Əvvəlcə fərz edək ki, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq ...$ monoton artan ardıcıllıqdır. Onda

$$\lim_{n=\infty} B_n = B$$

$B = \sup\limits_n \{B_n\}$, $\forall$ n üçün $B_n \le B$. Onda (1) bərabərsizliyini nəzərə alsaq deyə bilərik ki, $A_n \le B_n$ doğrudur. Və B_n yuxarıdan məhduddur. Onda A_n-də yuxarıdan məhduddur, məsələn B ədədi ilə. Digər tərəfdən (A) müsbət hədli sırasında A_n –lər geniş mənada monoton artan ardıcıllıq əmələ gətirir. Və Veyerştras teoreminə görə A_n ardıcıllığının sonlu limiti var, yəni (A) sırası yığılandır.

Fərz edək ki, (A) sırası dağılır. Onda göstərək ki, (B) sırası da dağılır. (A) sırası üçün $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = +\infty$. Onda $A_n \le B_n$-ə görə və limitlər haqda teoremə görə alırıq ki, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = +\infty$. Yəni (B) sırası da dağılandır.

Teorem 2. *Tutaq ki, bizə iki müsbət hədli sıra verilmişdir.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (A)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... \qquad (B)$$

Belə ki, $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K$ *(Burada fərz olunur ki,* $b_n = 0$ *deyil). Burada aşağıdakı hallar mümkündür.*

1) $0<K<+\infty$ *olarasa onda (A) və (B) sıraları eyni zamanda ya yığılandır, ya da dağılandır.*

İsbatı. Ardıcıllığın tərifinə görə $\exists\, \varepsilon>0$, $\exists\, n_0$, $\forall\, n>n_0$ var ki, $\left| \dfrac{a_n}{b_n} - K \right| < \varepsilon$

Yəni $K - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < K+\varepsilon$ (1). Əgər 1) şərti ödənərsə onda b_n-lərin hamısı müsbət olmalıdır. Ümumiliyi pozmadan deyək ki, b_n – lərin hamısı müsbətdir. Onda

$$(K-\varepsilon)b_n<a_n<b_n(K+\varepsilon) \qquad (1')$$

Aydındır ki, əgər $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sırası yığılandırsa onda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(K+\varepsilon)\, b_n$ sırası da yığılandır. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(K+\varepsilon)\, b_n = (K+\varepsilon)\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Onda əvvəlki teoremə görə a_n sırası da yığılır. Yenə də həmin teoremə görə $a_n<b_n(K+\varepsilon)$ görə a_n dağılarsa onda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(K+\varepsilon)\, b_n$ –də dağılandır. Və onda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ –də dağılandır. Əgər a_n yığılandırsa onda hökm etmək olar ki, b_n –də yığılır. Və b_n dağılırsa onda a_n –də dağılır. Sonuncuları isbat etmək üçün $\dfrac{b_n}{a_n}$-ə baxmaq lazımdır.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{K}. \qquad \frac{1}{K} - \varepsilon < \frac{b_n}{a_n} < \frac{1}{K}+\varepsilon. \quad b_n<\left(\frac{1}{K}+\varepsilon\right)a_n.$$

Onda yuxarıda deyilənləri tətbiq etsək deyilənlər doğru olar.

2). $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$. (K=0).

Əgər b_n sırası yığılarsa onda a_n sırası da yığılır. Və əgər a_n dağılarsa onda b_n sırası da dağılır. Amma a_n sırası yığılarsa buradan b_n sırasının yığılmasını demək olmaz.

İsbatı. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\, n_0$, $\forall\, n>n_0$ var ki, $0\le\frac{a_n}{b_n}\le\varepsilon$. Alırıq ki, $a_n<\varepsilon\, b_n$ (1) doğrudur. Onda teoremin hökmü müsbət sıraların müqayisəsi haqqında 1-ci teoremdən çıxır.

3). $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$.

a_n sırası yığılarsa b_n sırası da yığılar, b_n sırası dağılarsa a_n sırası da dağılar.

İsbatı. Limitin tərifinə görə $\exists\, n_0$ var ki, $\forall$ M>0, $\forall\, n>n_0$, $\frac{a_n}{b_n}>M$. Buradan da alınır ki, $a_n>M\, b_n$ doğrudur. Onda teoremin hökmü müsbət sıraların müqayisəsi haqqında 1-ci teoremdən çıxır.

Teorem 3. *Tutaq ki, bizə iki müsbət hədli sıra verilmişdir.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots \qquad (A)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n = b_1+b_2+b_3+\dots+b_n+\dots \qquad (B)$$

Belə ki, aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad (1)$$

Əgər (B) sıra yığılarsa onda (A) sırası da yığılır. Əgər (A) sırası dağılandırsa onda (B) sırası da dağılandır.

İsbatı. (1) bərabərsizliyindən alınır ki,

$$\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1},\quad \frac{a_3}{a_2}\le\frac{b_3}{b_2},\ \dots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_n}{b_{n-1}}$$

Bu bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə vursaq onda alarıq.

$$\frac{a_n}{a_1}\le\frac{b_n}{b_1}\ \to\ a_n\le\frac{a_1}{b_1}\, b_n.$$

Buradan isə müsbət hədli sıraların müqayisəsi haqqında 1-ci teoremdən isbat aydın gürünür.

Kummer əlaməti.

İndi isə konkret olaraq Kummer (E.E.Kummer) əlaməti anlayışını verək. Sonralar biz bu əlamətə ümumi sxem kimi baxacağıq.
Kummer əlaməti. Tutaq ki, bizə müsbət hədli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (A)$$

sırası və müsbət hədli $c_1, c_2, c_3, ... ,c_n, ...$ ardıcıllığı verilmişdir. Belə ki, aşağıdakı sıra dağılandır.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

Qeyd edək ki, biz burada ancaq dağılma əlamətindən danışacağıq. Yığılma əlamətinin izahına isə ehtiyac yoxdur. (A) sırasını aşağıdakı variantda düzəldək.

$$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$$

Əgər $\forall \delta > 0$ və $\forall n > N$ üçün $K_n \geq \delta$ şərti ödənərsə onda sıra yığılandır. Əgər $\forall \delta > 0$ və $\forall n > N$ $K_n \leq 0$ şərti ödənərsə onda sıra dağılandır.
İsbatı. Tutaq ki,

$$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \delta > 0 \qquad (1)$$

Onda bu bərabərsizlik bütün n-lər üçün doğru olar. (1) bərabərsizliyinin hər iki tərəfini a_{n+1} -ə vursaq onda alarıq.

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta a_{n+1} \qquad (2)$$

Onda

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > 0 \text{ və ya } c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1} \qquad (3)$$

Buradan alınır ki, $c_n a_n$ monoton azalır və sonlu limiti var. (Belə ki, o, aşağıdan sıfır ilə məhduddur.)

Beləliklə $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1})$ sırası da yığılandır.Və onun birinci n həddinin cəmi $c_1a_1 - c_{n+1}a_{n+1}$ –in sonlu limiti var. Onda (3) bərabərsizliyindən istifadə edib müsbət hədli sıraların müqayisəsi haqqında 1-ci teoremə əsaslansaq isbat aydın olar. yəni $\sum_{n=1}^{\infty}\delta\, a_{n+1}$ sırası yığılır, onda (A) sırası da yığılandır. Əgər n>N üçün

$$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \le 0 \qquad (4)$$

şərti ödənərsə onda aşağıdakı bərabərsizlik doğru olar.

$$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} \le c_{n+1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \le \frac{c_{n+1}}{c_n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{c_n}{c_{n+1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}} \qquad (5)$$

Onda (5) bərabərsizliyindən istifadə edib müsbət hədli sıraların müqayisəsi haqqında 3-cü teoremə əsaslansaq deyə bilərik ki, $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ sırası dağılandır. Bu isə (A) sırasının dağılan olması deməkdir. Teorem isbat olundu.

Kummer əlamətinin limit variantı.

Tutaq ki, K_n variantının sonlu və ya sonsuz limiti var.

$$\lim K_n = K$$

Onda $K > 0$ olarsa sıra yığılan, $K\langle 0$ olarsa sıra dağılandır. İndi isə Kummer əlamətinin köməyilə bir sıra vacib yığılma əlamətinə baxaq.

a). Tutaq ki, $c_n = 1$. Şərt budur ki, $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ sırası dağılsın. Onda $K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$.

Burda $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ - ni D_n ilə işarə edək. Onda $K_n = \frac{1}{D_n} - 1$.

Əgər $\lim D_n = D$ olsa onda $\lim K_n = K = \frac{1}{D} - 1$. Əgər $D = 0$ olsa onda $K = +\infty$, əgər $D = +\infty$ olsa onda $K = -1$ olacaq. $D>1$ olduqda aydındır ki, $K<0$, onda Kummer əlamətinə görə sıra dağılır. Əgər $D<1$ olsa onda $K>0$ və sıra yığılır.

b). Tutaq ki, $c_n = n$ və şərt budur ki, $\sum\frac{1}{n}$ sırası dağılır. Onda

$$K_n = n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = R_n - 1 \qquad n\frac{a_n}{a_{n+1}} - n = R_n$$

Əgər $\lim R_n = R$ olsa onda $\lim K_n = K = R - 1$. Əgər $R = \pm\infty$ onda $K = \pm\infty$. $R>1$ olsa onda $K>0$, onda Kummer əlamətinə görə sıra yığılır. $R<1$ olsa onda $K<0$ onda sıra dağılır.

c). Tutaq ki, $c_n = n\ln n$ $(n \geq 2)$, şərt budur ki, $\sum \frac{1}{n\ln n}$ dağılsın. Onda

$$K_n = n\ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1).$$

Sonuncunu aşağıdakı variantda yazaq.

$$K_n = \ln n\left[n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1\right] - \ln(1+\frac{1}{n})^{n+1} = B_n - \ln(1+\frac{1}{n})^{n+1}.$$

$$B_n = \ln n\left[n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1\right] = \ln n(R_n - 1).$$

Tutaq ki, B_n –nin sonlu və ya sonsuz limiti var. Yəni

$$\lim B_n = B \qquad (1)$$

Onda $B>1$ olarsa sıra yığılır,$B<1$ olsa sıra dağılır. Doğrudanda

$$\lim ln(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \log e = 1.$$

Onda Kummerə görə $\lim K_n = K = B-1$. Əgər $B = \pm\infty$ onda $K = \pm\infty$. Buradan isə Kummer əlamətinə istinad etsək isbat aydın olar.

Qeyd edək ki, (1) bərabərliyinə Bertran əlaməti deyilir.

Plan

1. Giriş.
2. Sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığı.
3. Sıranın yığılması üçün zəruri və kafi şərt.
4. Müsbət hədli sıralar.
5. Müqayisə teoremləri.
6. Kummer əlaməti
7. Kummer əlamətinin limit variantı.