BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ
TƏTBİQİ RİYAZİYYAT VƏ KİBERNETİKA FAKULTƏSİ

«Tətbiqi Riyaziyyat» kafedrası

I kurs 370-№li qrup tələbəsi
Əmircanov Rəşad Paşa oğlunun

«Limit nöqtəsi»
mövzusundan

KURS İŞİ

ELMİ RƏHBƏR - f.r.e.d. prof. Orucov H. D
KAFEDRA MÜDİRİ - akad. Qasımov M. G

BAKI 2005

Giriş

Bildiyimiz kimi Riyazi analiz teoremləri onların isbatı ilə öyrənir və tətbiq sahələrini araşdırır. Riyazi analiz XVIII əsrdə yaranmış, lakin onun tam əsaslandırılması, ancaq XIX əsrin sonunda Koşinin yaratdığı limit nəzəriyyəsinin köməyi ilə baş vermişdir.

Analizin möhkəm bünövrəsinin qoyulmasında həlledici addımı keçən əsrin 20-ci illərində funksiyanın və ardıcıllığın limitinin və analizin çox sayda fundamental teoremlərini isbat etməklə O. Koşi[1] atmışdır. «Limit» terminini elmə ilk dəfə İ. Nyuton[2] gətirmişdir.

Riyazi analizdə limitin böyük rolu vardır. Ardıcıllıqları öyrənmək üçün isə limit və limit nöqtəsi anlayışlarının əvəssiz rolu vardır. Ümumiyyətlə, limit nöqtəsi anlayışı ardıcıllıqlara aid olan bir anlayışdır. Ona görə də limit nöqtəsi anlayışının nə olduğunu araşdıraq.

Əvvəlcə «limit» sözünün hərfi mənasına baxaq: «limit»[3] - latıncadan limes(limitis) sözlərindən götürülmüş mənası sərhəd, hədd deməkdir.

Riyaziyyatda isə bu anlayışın mənası belə başa düşülür: Tutaq ki,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a .$$

n artdıqca(sonsuz) $\{a_n\}$ ardıcıllığının elementlərinin qiymətləri a ədədinə yaxınlaşır, yığılır. Daha doğrusu bu o deməkdir ki, n-in çox böyük qiymətlərində ardıcıllığın elementlərin qiyməti a-nın yaxın ətrafında yerləşir.

Burada a sonlu ədəd və ya sonsuzluq simvollarından hər hansı biri ola bilər. a-ın sonsuz halında ardıcıllıq sonsuz böyük adlanır:

Hər bir ardıcıllığın elementlərindən düzəldilmiş çoxluq sonsuzdur. Hətta ardıcıllığın bütün elementləri bərabər olsa belə, yəni ardıcıllıq bir elementdən ibarət olsa belə, onun elementlərindən düzəldilmiş çoxluq sonsuzdur.

---

[1]. Koşi Ogüsten Lui(1789-1857) – böyük fransız riyaziyyatçısı

[2]. İsaak Nyuton(1643-1727) – böyük ingilis alimi

[3]. Limit(lat.) - sərhəd , hədd, hüdud; kəmiyyətin ala biləcəyi son qiymət, hüdud, hədd; məsələn idxal, ixrac.

Ardıcıllıqların limiti

Ardıcıllıqların limitinin araşdırılması və onun bəzi xassələri

Tərif 1(ardıcıllığın tərifi). *Tutaq ki, hər bir n natural ədədinə qarşı uyğun olaraq müəyyən* a_n *həqiqi ədədi qoyulmuşdur.* a_n (n=1,2,...) *elementlərinin məcmusu ədədi ardıcıllıq və ya sadəcə olaraq ardıcıllıq adlanır*; hər bir a_n elementi bu ardıcıllığın elementi, n isə nömrəsi(indeksi) adlanır. a_n elementləri həqiqi və ya kompleks ola bilərlər. Biz burada onların həqiqi olan hallarına baxacağıq ($a_n \in R$).

Qeyd edək ki, n natural ədədinin müxtəlif qiymətlərində(məsələn $n_1 \neq n_2$) ardıcıllığın a_{n_1}, a_{n_2} elementləri bərabər ola bilərlər: $a_{n_1} = a_{n_2}$.

Həmin tərifə görə ardıcıllıq həmişə sonsuz elementli çoxluğu özündə saxlayır.

Elementləri a_n-lər olan ədədi ardıcıllığı ya a_n, n=1,2,..., kimi, ya da $\{a_n\}$ kimi işarə edəcəyik.

Ardıcıllığa bir neçə misal göstərək:

$$1)\{n\} = \{1,2,3,...\},$$

$$2)\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3},...\right\},$$

$$3)\{(-1)^n\} = \{-1,+1,-1,...\}.$$

Tərif 2. *Əgər istənilən ε>0 üçün, elə yalnız ε-dan asılı* n_ε *ədədi tapmaq olarsa ki,* $n \geq n_\varepsilon$ *bərabərsizliyini ödəyən istənilən n-lər üçün*

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənsin, onda a ədədi verilmiş $\{a_n\}$ *ardıcıllığın limiti adlanır.*

Bunu belə işarə edirlər:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

və ya

$$a_n \to a \ (n \to \infty)$$

və deyirlər ki, a_n dəyişənləri a-ya yaxınlaşır və ya $\{a_n\}$ ardıcıllığı a ədədinə yaxınlaşır (yığılır).

Sonlu limiti olan ardıcıllığa yığılan ardıcıllıq deyilir. Yığılmayan ardıcıllığa isə dağılan ardıcıllıq deyilir.

Qeyd edək ki, $|a_n - a| < \varepsilon$ bərabərsizliyi $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür.

Tərif 3. *Verilmiş a ədədini daxilində saxlayan* (α, β) *aralığına a-nın ətrafı deyilir.*

Tərif 3'. *Xüsusi halda ε>0 ədədi üçün bütün* $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ *tipli intervallara a nöqtəsinin simmetrik ətrafı və ya ε-ətrafı, ε-na isə onun radiusu deyilir.*

Ətraf anlayışından istifadə edərək ardıcıllığın tərifini aşağıdakı hissələrə ayırmaq olar.

Tərif 2'. *Sonlu sayda hədləri müstəsna olmaqla ardıcıllığın təxminən bütün hədləri hər hansı a ədədinin istənilən ətrafında yerləşərsə, onda a ədədi* $\{a_n\}$ *ardıcıllığının limiti adlanır.*

Misal 1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ardıcıllığı yığılır və limiti var və o, sıfra bərabərdir. Əslində Arximed teoreminə görə istənilən $\varepsilon>0$ üçün həmişə elə n_ε ədədi var ki, $n_\varepsilon > \varepsilon$. Elə buna görə də istənilən $n \geq n_\varepsilon$ üçün

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

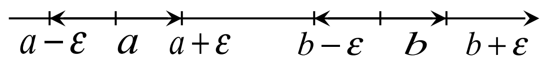
bərabərsizliyi doğrudur. Bunun da mənası $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ deməkdir.

Misal 2. $\left\{\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ ardıcıllığı isə dağılandır. Doğrudan da, elə a ədədi tapmaq olmaz ki, onun istənilən ε-ətrafında(məsələn $0<\varepsilon<1$ olduqda) verilmiş ardıcıllığın sonsuz sayda elementləri yerləşsin və a həmin ardıcıllığın limiti olsun.

Tərif 4. *Əgər elə ε>0 ədədi varsa ki, istənilən n natural ədədi üçün* $m_n > n$ *bərabərsizliyini ödəyən elə* m_n *natural ədədi tapmaq mümkün olsun və* $|a - a_{m_n}| \geq \varepsilon$ *bərabərsizliyi ödənsin, onda a ədədi* $\{a_n\}$ *ardıcıllığının limiti olmur.*

Teorem 1. *Ədədi ardıcıllığın birdən artıq limiti ola bilməz.*

İ s b a t ı. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, $\{a_n\}$ ardıcıllığının heç olmasa iki müxtəlif limiti var: a və b. Tutaq ki, $a>b$. Onda $\varepsilon>0$ ədədini elə seçək ki, O(a, ε) və O(b, ε) ətrafları kəsişməsinlər(şəkil 1).



Şəkil 1.

Məsələn $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ götürmək olar. Elə n_1 nömrəsi var ki, bütün $n \geq n_1$-lər üçün $a_n \in O(a,\varepsilon)$ və elə n_2 nömrəsi var ki, bütün $n \geq n_2$-lər üçün $a_n \in O(b,\varepsilon)$. n_0 ilə n_1 və n_2 nömrələrinin böyüyünü işarə edək. Onda istənilən $n \geq n_0$ üçün $a_n \in O(a,\varepsilon)$ və $a_n \in O(b,\varepsilon)$, onda ola bilməz ki, göstərilən ətraflar kəsişməsinlər. Alınan ziddiyyət teoremin doğruluğunu göstərir.

Yığılan ardıcıllıqlar üçün aşağıdakı xassələri qeyd edək.

1. *Əgər*

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \ n=1,2,...,$$

və

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

ödənərsə, onda $\{b_n\}$ *ardıcıllığı yığılır və* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

İ s b a t ı. Tutaq ki, $\varepsilon>0$ qeyd edilmişdir. Elə n'_ε və n''_ε var ki, $n \geq n'_\varepsilon$ üçün

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

$n \geq n_\varepsilon''$ üçün isə

$$a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon .$$

n_ε ilə n_ε' və n_ε'' nömrələrindən ən böyüyünü işarə edək. Onda bütün $n \geq n_\varepsilon$ -lər üçün

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n < a + \varepsilon .$$

Buradan və $a_n \leq b_n \leq c_n$ (n=1,2,...) şərtindən alarıq ki, $n \geq n_\varepsilon$ üçün,

$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$$

bərabərsizliyi doğrudur. Bu da elə $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ deməkdir.

2.1. *Əgər* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *və* $a < b$ *olarsa, onda elə* n_b *var ki,* $n \geq n_b$ *üçün* $a_n < b$ *bərabərsizliyi doğrudur.*

Uyğun olaraq aşağıdakı hökmü də verək:

2.2. *Əgər* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *və* $a > c$ *olarsa, onda elə* n_c *var ki,* $n \geq n_c$ *üçün* $a_n > c$ *bərabərsizliyi doğrudur.*

İ s b a t ı. $\varepsilon = b - a$ qəbul edək. Limitin tərifinə görə, elə n_b nömrəsi var ki, $n \geq n_b$ üçün

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon = b .$$

Birinci hökm isbat olundu. İkinci hökmün isbatı analojidir:

$\varepsilon = a - c$ qəbul edək. Onda, elə n_c nömrəsi var ki, $n \geq n_c$ üçün

$$c = a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon .$$

3.1. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *və* $a_n \geq b$, $n = 1,2,...$ *olarsa, onda* $a \geq b$ *olar.*

Uyğun olaraq aşağıdakı hökmü də verək:

3.2. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *və* $a_n \leq c$, $n = 1,2,...$ *olarsa, onda* $a \leq c$ *olar.*

İ s b a t ı. Əgər $a < b$ olsa idi, onda **2.1.** xassəsinə görə, elə a_n tapmaq olardı ki, $a_n < b$ olardı. Bu isə şərtə ziddir. İkinci hökmün isbatı analojidir.

Monoton ardıcıllıqların limiti

Ardıcıllığı, daha doğrusu, onun elementlərinin çoxluğunu və onun elementlərinin qiymətləri çoxluğunu fərqləndirmək lazımdır. Birinci çoxluq həmişə sonsuzdur, belə ki, ən azı $n = 1,2,...$ nömrələri ilə fərqlənən elementlərin məcmusundan ibarətdir. İkinci çoxluq verilmiş ardıcıllığın elementlərinin qiymətini bildirən bütün rəqəmlərdən ibarətdir, o həm də sonlu ola bilər. Məsələn, bütün ardıcıllıqlar kimi $a_n = 1, n = 1,2,...$ ardıcıllığı da sonsuz elementdən ibarətdir: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=1$, ancaq onun elementlərinin qiymətlərindən düzəldilmiş çoxluq yalnız bir elementdən ibarətdir: 1.

Tərif 5. *Ardıcıllığın elementlərindən düzəldilmiş çoxluq yuxarıdan (aşağıdan) məhdud olarsa, ardıcıllıq yuxarıdan(aşağıdan) məhdud adlanır.*

Bu tərifi ardıcıllığın elementləri anlayışından istifadə edərək aşağıdakı kimi hissələrə bölmək olar:

Tərif 5'. *Əgər elə b ədədi varsa ki, istənilən n nömrəsi üçün $a_n \le b$ (uyğun olaraq $a_n \ge b$) olsun, onda $\{a_n\}$ ardıcıllığı yuxarıdan(aşağıdan) məhdud adlanır.*

Tərif 6. *Yuxarıdan və aşağıdan məhdud olan ardıcıllıq sadəcə olaraq məhdud ardıcıllıq adlanır.*

Tərif 7. *Yuxarıdan və aşağıdan məhdud olmayan ardıcıllıq qeyri-məhdud ardıcıllıq adlanır.*

Aydındır ki, $\{a_n\}$ ardıcıllığı yalnız və yalnız o zaman məhdud olar ki, $|a_n| \le b$ bərabərsizliyi hər hansı b və istənilən n natural ədədi üçün doğru olsun.

Məsələn, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ və $\left\{\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ ardıcıllıqları məhduddurlar. $\{n\}$ ardıcıllığı aşağıdan məhduddur, lakin yuxarıdan məhdud deyil. $\left\{n\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ ardıcıllığı isə qeyri-məhduddur.

Teorem 2. *Əgər ardıcıllığın limiti varsa, onda o, məhduddur.*

İ s b a t ı. Tutaq ki, yığılan $\{a_n\}$ ardıcıllığı verilib və $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Məsələn, $\varepsilon = 1$ qeyd edək. Limitin tərifinə görə, elə n_1 var ki, istənilən $n \ge n_1$ üçün $|a_n - a| < 1$ doğrudur. Tutaq ki, d ilə $1, |a_1 - a|, \ldots, |a_{n_1-1} - a|$ ədədlərindən ən böyüyünü işarə etmişik. Onda bütün n-lər üçün $|a_n - a| \le d$ ödənir, yəni $a - d \le a_n \le a + d$ doğrudur. Bu da elə verilmiş ardıcıllığın məhdud olduğunu təstiq edir.

Tərif 8. $\{a_n\}$ *ardıcıllığının elementlərinin qiymətlərindən düzəldilmiş çoxluğun yuxarı(aşağı) sərhəddi verilmiş ardıcıllığın yuxarı(aşağı) sərhəddi adlanır və aşağıdakı kimi işarə olunur:*

$\sup\{a_n\}$ *və ya* $\sup\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$ *(*uyğun olaraq $\inf\{a_n\}$ *və ya* $\inf\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$ *).*

Əgər yuxarı(aşağı) sərhəd ədəddirsə, onda bu tərifi aşağıdakı kimi qeyd edək:

Əgər

1) istənilən n üçün $a_n \le a$ (uyğun olaraq $a_n \ge a$) olsun

və

2) istənilən $\varepsilon > 0$ üçün, elə n_ε ədədi tapmaq olarsa ki, $a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$ (uyğun olaraq $a_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon$) doğru olsun, onda a ədədi a_n, $n = 1,2,\ldots$ ardıcıllığının yuxarı(aşağı) sərhəddi adlanır.

Analoji yolla ardıcıllığın yuxarı(aşağı) sərhəddinin sonsuzluq simvolları olan halları üçün də bu tərifi vermək olar: Əgər

Nümunə üçün göstərək ki, $\sup\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1,\ \inf\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0,\ \sup\{n\} = +\infty,\ \inf\{n\} = 1$.

Tərif 9. *Əgər* a_n*, n=1, 2, ... ardıcıllığı istənilən n üçün* $a_n \le a_{n+1}$ *(uyğun olaraq* $a_n \ge a_{n+1}$*) şərtini ödəyərsə, onda bu ardıcıllıq monoton artan(monoton azalan) ardıcıllıq adlanır.*

Monoton artan və monoton azalan ardıcıllıq sadəcə olaraq monoton ardıcıllıq adlanır.

Məsələn, $\{n\}$ ardıcıllığı monoton artandır, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ardıcıllığı monoton azalandır, $\left\{\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ ardıcıllığı isə monoton deyil.

Teorem 3. *İstənilən yuxarıdan(aşağıdan) məhdud monoton artan(monoton azalan)* $\{a_n\}$ *ardıcıllığının limiti var:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \text{ (uyğun olaraq } \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}\text{)}.$$

İ s b a t ı. 1) Tutaq ki, $\{a_n\}$ ardıcıllığı monoton artan və yuxarıdan məhduddur. Sonuncu hökmə görə onun sonlu yuxarı sərhəddi var: $\sup\{a_n\} = a$. Onda göstərək ki, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

$\varepsilon>0$ qeyd edək. $\sup\{a_n\} = a$ şərtindən alırıq ki, istənilən n=1,2,... üçün $a_n \le a$ və elə n_ε nömrəsi var ki, $a_{n_\varepsilon} > a-\varepsilon$. Onda verilmiş ardıcıllığın monotonluğu şərtindən alarıq ki, istənilən $n \ge n_\varepsilon$ nömrələri üçün $a-\varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le a_n \le a$. Ona görə də, istənilən n üçün $|a-a_n| < \varepsilon$ olar, bu da elə $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ deməkdir.

2) Bu hissənin isbatı bundan əvvəlki hissənin isbatına analojidir: İndi tutaq ki, $\{a_n\}$ ardıcıllığı monoton azalan və aşağıdan məhduddur. Onda $\inf\{a_n\} = a$. Göstərək ki, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

$\varepsilon>0$. $\inf\{a_n\} = a$ şərtindən alırıq ki, istənilən n üçün $a_n \ge a$ və elə n_ε nömrəsi var ki, $a_{n_\varepsilon} < a+\varepsilon$. Onda monotonluqdan alarıq ki, istənilən $n \ge n_\varepsilon$ nömrələri üçün $a \le a_n \le a_{n_\varepsilon} < a+\varepsilon$. Buradan da alarıq ki, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Beləliklə teorem tamamilə isbat olundu.

Biz gördük ki, əgər ardıcıllıq yığılırsa, o, məhduddur(teorem 2), belə ki, əgər monoton artan ardıcıllıq yığılırsa, o, yuxarıdan məhduddur, digər tərəfdən, əgər monoton artan ardıcıllıq yuxarıdan məhduddursa, onda o,yığılır(teorem 3). Onda aşağıdakı hükmlər doğrudur.

Nəticə. Monoton artan ardıcıllığın yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt verilmiş ardıcıllığın yuxarıdan məhdud olmasıdır.

Analoji hökm monoton azalan ardıcıllıqlar üçün də doğrudur.

Qeyd. Əgər $[a_n, b_n]$ uzunluğu sıfıra yaxınlaşan bir-birinə daxil olan parçalar sistemi, ξ isə verilmiş sistemin bütün parçalarına daxil olan nöqtədirsə, onda

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Misal. *e ədədi.*

Tutaq ki, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1,2,...$. Göstərək ki, bu ardıcıllıq yığılandır.

Nyuton binomuna görə mötərizələri açsaq onda alarıq:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 1}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (1)$$

n-dən $n+1$-ə keçdikdə toplananlarının bütün müsbət ədədləri artır və bundan əlavə hər bir toplanan çoxalır:

$$1-\frac{s}{n}<1-\frac{s}{n+1},\quad s=1,2,\ldots,n-1$$

onda

$$x_n<x_{n+1},\quad n=1,2,\ldots .$$

daha sonra qeyd edək ki, (1) bərabərliyində hər bir $\left(1-\frac{s}{n}\right)$ şəkilli mötərizələr vahiddən kiçikdir və istənilən n=1,2,... üçün $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ olduğundan, alarıq ki,

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leq 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Həndəsi silsilənin tərifinə görə $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$ ardıcıllığının istənilən n natural ədədi üçün cəmini tapmaq olar və o, 3-ə bərabərdir. Ona görə də alarıq:

$$2<x_n<3. \qquad (2)$$

Onda $\{x_n\}$ ardıcıllığı monoton artır, yuxarıdan məhduddur və deməli, teorem 3-ə görə limitə malikdir. Bu limit e hərfi ilə işarə olunur. (1) və (2)-dən alarıq ki,

$$2<e\leq 3.$$

Bu ədədi daha da dəqiqləşdirsək, e=2,7182... alarıq. e ədədi riyazi analizdə əsas rollardan birini oynayır. O natural loqarifmin də əsasını təşkil edir.

Bolsano-Veyerştrass teoremi və Koşi kriteriyası

Tərif 10. *Əgər istənilən k üçün elə natural* n_k *ədədi varsa ki,* $b_k=a_{n_k}$ *olsun və* $n_{k_1}<n_{k_2}$ *bərabərsizliyi yalnız və yalnız* $k_1<k_2$ *olduqda ödənsin, onda* $b_k,\ k=1,2,\ldots,$ *ardıcıllığı* $\{a_n\}$ *ardıcıllığının alt ardıcıllığı adlanır. Burada* $\{b_k\}$ *ardıcıllığı* $\{a_{n_k}\}$ *ardıcıllığı və ya* $a_{n_k},\ k=1,2,\ldots,$ *ilə təyin olunur.*

Başqa sözlə, əgər hər hansı ardıcıllıq verilibsə və onun hər hansı alt ardıcıllığından yeni bir ardıcıllıq düzəldilmişsə, onda o, verilmiş ardıcıllığın alt ardıcıllığı adlanır, əgər onun elementlərinin nizamı verilmiş ardıcıllığın elementlərinin nizamı ilə eyni olsa.

Məsələn, $1,3,5,\ldots,2n+1,\ldots$ ardıcıllığı $1,2,3,\ldots,n,\ldots$ natural ədədlər ardıcıllığının alt ardıcıllığıdır, lakin $2,1,3,4,\ldots,n,\ldots$ ardıcıllığı natural ədədlər ardıcıllığının alt ardıcıllığı deyil. Hər iki halda ardıcıllığın elementlərindən düzəldilmiş alt çoxluqlar natural ədədlər çoxluğunun alt çoxluğudur, lakin birinci halda ardıcıllığın hədləri natural ədədlərdə olduğu kimi nizamlanmış, ikinci halda isə, bu nizam pozulmuşdur.

Teorem 4 (Bolsano-Veyerştrass[1]). *İstənilən məhdud ardıcıllıqdan yığılan alt ardıcıllıq ayırmaq olar.*

İ s b a t ı. Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı məhduddur, yəni, elə $[a, b]$ parçası var ki, istənilən n=1, 2, ..., üçün $a \le x_n \le b$ ödənir.

$[a, b]$ parçasını iki bərabər hissəyə bölək: $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ və $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Alınan parçalardan verilmiş ardıcıllığın sonsuz sayda elementini özündə saxlayanını $[a_1, b_1]$ ilə işarə edək. Ola bilsin ki, alınan parçalardan hər ikisi verilmiş ardıcıllığın sonsuz sayda elementini özündə saxlasın, onda həmin parçalardan istənilən birini $[a_1, b_1]$ ilə işarə edək. Fərz edək ki, x_{n_1} $[a_1, b_1]$ parçasında yerləşir və verilmiş ardıcıllığın hər hansı elementidir.

Yenidən $[a_1, b_1]$ parçasını iki bərabər hissəyə bölək və yeni alınmış parçalardan heç olmasa biri verilmiş ardıcıllığın sonsuz sayda elementini özündə saxlayır, bu parçanı $[a_2, b_2]$ ilə işarə edək. $\{x_n\}$ ardıcıllığının sonsuz sayda elementi $[a_2, b_2]$ parçasında yerləşməsindən alarıq ki, elə x_{n_2} var ki,

---

[1]. K. Veyerştrass (1815-1897) – alman riyaziyyatçısı, B. Bolsano (1781-1848) – çex riyaziyyatçısı.

$x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ və $n_2 > n_1$. Prosesi sonsuz davam davam etdirsək $[a_n, b_n]$ parçalarından ibarət ardıcıllıq və $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots,$ nöqtələrindən ibarət ardıcıllıq alarıq. Buradan belə görünür ki, $\{x_{n_k}\}$ ardıcıllığı $\{x_n\}$ ardıcıllığının alt ardıcıllığıdır. Göstərək ki, bu ardıcıllıq yığılır.

$[a_k, b_k], k = 1, 2, \ldots,$ ardıcıllığı bir-birinə daxil olan parçalar ardıcıllığı olduğundan, bu parçaların boyu sıfıra yaxınlaşır. $k \to \infty$ olduqda

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0 .$$

Onda Kantor teoreminə görə, bütün bu parçalara daxil olan yeganə ξ nöqtəsi var. Onda $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \xi$. $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ olduğdundan və yığılan ardıcıllığın xassəsinə (xassə 1) görə $\{x_{n_k}\}$ ardıcıllığı da yığılır və $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$.

Teorem isbat olundu.

Tərif 11. *Əgər istənilən ε>0 üçün elə n_ε nömrəsi varsa və istənilən n və m nömrələri üçün $n \ge n_\varepsilon$, $m \ge n_\varepsilon$ olduqda*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad (11.1)$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığı Koşi ardıcıllığı adlanır.

Bu tərifi aşağıdakı kimi də vermək olar:

İstənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə n_ε nömrəsi varsa ki, istənilən $n \ge n_\varepsilon$ və bütün müsbət tam p ədədləri üçün

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \qquad (11.2)$$

ödənsin, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığına Koşi şərtlərini ödəyən ardıcıllıq deyəcəyik.

(11.1) və (11.2) şərtlərinin doğruluğuna inanmaq üçün $n \geq m$ olduqda $p = n - m$, $m > n$ olduqda isə $p = m - n$ götürmək kifayətdir.

Koşi şərtini ödəyən ardıcıllıq həm də fundamental ardıcıllıq adlanır.

Teorem 5 (Koşi kriteriyası). *Ardıcıllığın yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt onun fundamental olmasıdır.*

Zəruriliyin i s b a t ı. Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı yığılır və $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Onda ardıcıllığın limitinin tərifinə görə istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə n_ε var ki, $n \geq n_\varepsilon$ üçün $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

İndi tutaq ki, $n \geq n_\varepsilon$ və $m \geq n_\varepsilon$, onda

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

doğrudur; belə ki, Koşi şərti ödənir.

Kafiliyin i s b a t ı. Tutaq ki, $\{x_n\}$ Koşi şərtini ödəyir, yəni, istənilən $\varepsilon>0$ üçün elə n_ε var ki, $n \geq n_\varepsilon$, $m \geq n_\varepsilon$, onda $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Məsələn $\varepsilon = 1$ qəbul edək. Onda elə n_1 var ki, $n \geq n_1$ və $m \geq n_1$ üçün $|x_n - x_m| < 1$. Məsələn, $n \geq n_1$ və $m = n_1$ qəbul etsək, $|x_n - x_{n_1}| < 1$ olar, belə ki, $x_{n_1} - 1 < x_n < x_{n_1} + 1$ olar. Bu da elə x_n, $n = n_1, n_1 + 1, \ldots,$ ardıcıllığının məhdud olduğunu göstərir. Onda teorem 4-ə görə onun yığılan alt $\{x_{n_k}\}$ ardıcıllığı var.

Tutaq ki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$. Göstərək ki, bütün verilmiş $\{x_n\}$ ardıcıllıqları da yığılır və a limitinə malikdir.

Hər hansı $\varepsilon > 0$ qeyd edək. Onda, ilk növbədə, ardıcıllığın limitinin tərifinə görə elə k_ε var ki, istənilən $k \geq k_\varepsilon$ üçün

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ardıcıllığın limitinin tərifinə görə yuxarıdakı bərabərsizlik bütün $n_k \geq n_{k_\varepsilon}$ üçün doğrudur. İkincisi, $\{x_n\}$ ardıcıllığının Koşi şərtini ödəyir, onda elə n_ε var ki, bütün $n \geq n_\varepsilon$ və $m \geq n_\varepsilon$ üçün

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$N_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$ işarə edək və hər hansı $n_k \geq N_\varepsilon$ qeyd edək. Onda istənilən $n \geq N_\varepsilon$ üçün alarıq:

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Bu da elə $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ deməkdir.

Teorem isbat olundu.

Sonsuz böyük və sonsuz kiçik ardıcıllıqlar

Tərif 12. *Tutaq ki,* $\{x_n\}$ *və* $\{y_n\}$ *ardıcıllıqları verilib. Bu ardıcıllıqların cəmi* $\{x_n + y_n\}$*, fərqi* $\{x_n - y_n\}$ *və hasili* $\{x_n y_n\}$ *ardıcıllıqları adlanır. Əgər* $y_n \neq 0, n = 1, 2, \ldots,$ *olarsa,* $\{x_n\}$ *ardıcılığının* $\{y_n\}$ *ardıcıllığına nisbəti* $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$

ardıcıllığı adlanır. Nəhayət, $\{x_n\}$ ardıcıllığının c ədədinə hasili $\{cx_n\}$ ardıcıllığı adlanır.

Tərif 13. *Əgər $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ olarsa, onda $\{\alpha_n\}$ ardıcıllığı sonsuz kiçik ardıcıllıq adlanır.*

Biz artıq $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\alpha_n = \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n$, $n = 1, 2, ...,$ sonsuz kiçik ardıcıllıqları ilə qarşılaşmışdıq.

Sonsuz kiçik ardıcıllığın bir neçə xassəsini qeyd edək:

I. *Sonsuz kiçik ardıcıllığın sonlu ədədlərinin cəbri cəmi də sonsuz kiçik ardıcıllıqdır.*

İ s b a t ı. Tutaq ki, $\{\alpha_n\}$ və $\{\beta_n\}$ sonsuz kiçik ardıcıllıqları verilmişdir. Göstərək ki, $\{\alpha_n + \beta_n\}$ və $\{\alpha_n - \beta_n\}$ ardıcıllıqları da, sonsuz kiçik ardıcıllıqlardır. $\varepsilon > 0$ götürək, onda elə n_ε nömrəsi var ki, istənilən $n \ge n_\varepsilon$ üçün $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ və $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ doğrudur. Ona görə də $n \ge n_\varepsilon$ üçün

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

doğrudur və bu da elə $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \pm \beta_n) = 0$ deməkdir.

II. *Sonsuz kiçik ardıcıllığın məhdud ardıcıllığa hasili də sonsuz kiçik kəmiyyətdir.*

İ s b a t ı. Tutaq ki, $\{\alpha_n\}$ sonsuz kiçik, $\{x_n\}$ isə məhdud ardıcıllıqdır. Belə ki, elə $b > 0$ ədədi var ki, istənilən $n = 1, 2, ...,$ nömrələri üçün $|x_n| \le b$ doğrudur.

$\varepsilon > 0$ götürək; sonsuz kiçik ardıcıllığın tərifinə görə elə n_ε var ki, bütün $n \ge n_\varepsilon$ üçün $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{b}$ doğrudur. Ona görə də, bütün $n \ge n_\varepsilon$-lər üçün

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n||x_n| < \frac{\varepsilon}{b}\cdot b = \varepsilon$$

doğrudur və bu göstərir ki, $\{\alpha_n x_n\}$ ardıcıllığı sonsuz kiçikdir.

Araşdırma: Sonlu ədədin sonsuz kiçik ardıcıllığa hasili sonsuz kiçik ardıcıllıqdır.

Tərif 14. *Əgər istənilən ε ədədi üçün elə n_ε nömrəsi varsa ki, istənilən $n \ge n_\varepsilon$ üçün $|x_n| > \varepsilon$ olsun, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığı sonsuz böyük ardıcıllıq adlanır.* Bu halda deyirlər ki,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty .$$

Uyğun olaraq aşağıdakı oxçar tərifləri də verək: x_n, $n = 1, 2, ...,$ üçün;

Əgər istənilən ε ədədi üçün elə n_ε varsa ki, istənilən $n \ge n_\varepsilon$ üçün $x_n > \varepsilon$ olsun, onda deyirlər ki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Əgər istənilən ε ədədi üçün elə n_ε varsa ki, istənilən $n \ge n_\varepsilon$ üçün $x_n < \varepsilon$ olsun, onda deyirlər ki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Əgər $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ və ya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ olarsa, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığı sonsuz böyük ardıcıllıq adlanır.

Onda limitin tərifindən aydın olur ki, sonsuz böyük ardıcıllıqlar limitə malik deyildirlər. Burada da ümumiliyi pozmadan «lim» işarələməsindən istifadə edəcəyik.

Bundan sonra əgər ardıcıllığın ədədi limiti varsa, deyəcəyik ki, ardıcıllığın sonlu limiti vardır.

Bir misala baxaq: Göstərək ki, 1) $q>1$ olduqda, $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$, 2) $0<q<1$ olduqda isə, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ olar.

1) Tutaq ki, $\varepsilon > 0$ və $q>1$. Onda

$$q^n = (1+(q-1))^n > 1+n(q-1) > n(q-1) > \varepsilon .$$

bərabərsizliyindən alarıq ki, $q^n > \varepsilon$ olar, istənilən $n > \dfrac{\varepsilon}{q-1}$ üçün.

2) İndi tutaq ki, $\varepsilon > 0$ və $0<q<1$. Onda alarıq:

$$\frac{1}{q^n} = \left(1+\left(\frac{1}{q}-1\right)\right)^n > 1+n\left(\frac{1}{q}-1\right) > n\left(\frac{1}{q}-1\right).$$

Buradan da alarıq ki,

$$q^n < \frac{q}{n(1-q)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{q}{1-q} < \varepsilon .$$

Onda aydındır ki, istənilən natural ədəd $n > \dfrac{q}{\varepsilon(1-q)}$ şərtini ödəyir. Beləliklə misal həll olundu.

Artıq bildiyimiz kimi, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ a ədədinin ε-ətrafı adlanır. ∞, +∞ və -∞ simvollarının ε-ətraflarını uyğun olaraq $O(\infty,\varepsilon)$, $O(+\infty,\varepsilon)$ və $O(-\infty,\varepsilon)$ ilə işarə edək. Onda

$$O(\infty,\varepsilon) = \{x : |x| > \varepsilon\}$$
$$O(+\infty,\varepsilon) = \{x : x > \varepsilon\}$$
$$O(-\infty,\varepsilon) = \{x : x < \varepsilon\}.$$

Burada ümumiliyi pozmadan fərz edirik ki, $\varepsilon > 0$.

Bu terminologiyadan istifadə edərək sonlu və istənilən sonsuz limitin tərifini vahid tərif altında birləşdirmək olar.

Tərif 15. *Əgər α kəmiyyətinin elə $O(\alpha,\varepsilon)$ ε-ətrafı varsa və elə n_ε nömrəsi varsa ki, istənilən $n \ge n_\varepsilon$ üçün $x_n \in O(\alpha,\varepsilon)$ olsun, onda α kəmiyyəti (ədəd və ya ∞, +∞, -∞ simvollarından biri) $\{x_n\}$ ardıcıllığının limiti adlanır.*

Ardıcıllıqlar üzərində cəbri əməliyyatlarla bağlı limitin xassələri

Lemma. *a ədədinin $\{x_n\}$ ardıcıllığının limiti olması üçün zəruri və kafi şərt $x_n = a + \alpha_n,\ n=1,2,...,$ olmasıdır, harada ki, $\{\alpha_n\}$ sonsuz kiçik ardıcıllıqdır.*

Zəruriliyin i s b a t ı. Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı yığılır və $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. İndi isə $\alpha_n = x_n - a,\ n=1,2,...,$ qəbul edək; limitin tərifinə görə istənilən $\varepsilon>0$ üçün elə n_ε nömrəsi var ki, istənilən $n\ge n_\varepsilon$ üçün $|x_n - a| < \varepsilon$. Yəni, istənilən $n \ge n_\varepsilon$ üçün $|\alpha_n| < \varepsilon$ olar, bu da elə $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ deməkdir.

Kafiliyin i s b a t ı. Tutaq ki, $x_n = a+\alpha_n,\ n=1,2,...,$ və $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. Limitin tərifinə görə istənilən $\varepsilon>0$ üçün elə n_ε nömrəsi var ki, istənilən $n\ge n_\varepsilon$ üçün

$|\alpha_n| < \varepsilon$. $\alpha_n = x_n - a$ qeyd etsək, deyə bilərik ki, istənilən $n \geq n_\varepsilon$ üçün $|x_n - a| < \varepsilon$ olar, bu da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ deməkdir. Lemma isbat olundu.

Bu lemma məlum limitin öyrənilməsində sonsuz kiçik ardıcıllığın böyük rolunu göstərir.necə ki, limitin ümumi anlayışı bu lemmanın köməyi ilə sıfır tərtibli limitə çevrilir. Bu hal bundan sonra yığılan ardıcıllığın hədlərinin xassələrinin öyrənilməsində geniş istifadə olunacaq.

1. Əgər $x_n = c,\ n = 1, 2, ...,$ olarsa, onda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Əslində isə, $x_n - c = c - c = 0,\ n = 1, 2, ...,$ ardıcıllığı sonsuz kiçik ardıcıllıqdır. Onda yuxarıdakı lemmaya görə $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

2. Əgər $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqları yığılırsa, onda $\{x_n \pm y_n\}$ ardıcıllıqları da yığılır və

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

yəni, iki yığılan ardıcıllığın cəbri cəminin limiti verilmiş ardıcıllıqların limitləri cəminə bərabərdir.

İ s b a t ı. Tutaq ki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ və $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Limitin varlığı haqda lemmanın şərtinin zəruriliyinə görə deyə bilərik ki,

$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n,\ n = 1, 2, ...,$$

harada ki, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, ona görə də,

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n),\ n = 1, 2, ...,$$

Sonsuz kiçik ardıcıllığın I xassəsindən çıxır ki, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \pm \beta_n) = 0$. Buna görə də, limitin varlığı haqda lemmanın şərtinin kafiliyindən çıxır ki,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Hökm isbat olundu.

3. Əgər $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqları yığılırsa, onda $\{x_n y_n\}$ ardıcıllıqları da yığılır və

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n,$$

yəni, yığılan ardıcıllıqların hasillərinin limiti verilmiş ardıcıllıqların limitləri hasilinə bərabərdir.

İ s b a t ı. Tutaq ki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ və $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Onda

$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n,\ n = 1, 2, ...,$$

harada ki, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, ona görə də,

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n).$$

Sonsuz kiçik ardıcıllıqların I və II xassələrindən çıxır ki,

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n) = 0.$$

Ona görə də

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Nəticə 1. Əgər $\{x_n\}$ ardıcıllığı yığılırsa, onda istənilən sonlu c ədədi üçün $\{cx_n\}$ ardıcllığı da yığılır və

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c \lim_{n\to\infty} x_n,$$

yəni sabiti həmişə limit xaricinə çıxarmaq olar.

Nəticə 2. Əgər $\{x_n\}$ yığılan ardıcıllıq və k natural ədəddirsə, onda

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = (\lim_{k\to\infty} x_n)^k .$$

4. Əgər $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqları yığılırsa, $y_n \neq 0,\ n = 1, 2, ...,$ və $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ olarsa, onda, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ardıcıllığı da yığılır və

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n},$$

yəni, iki yığılan ardıcıllığın nisbətinin limiti verilmiş ardıcıllıqların limitləri nisbətinə bərabərdir.

Nəticə

Limit nöqtəsi anlayışı Limit anlayışının əsasını təşkil edir. Lakin limit nöqtəsi anlayışı ilə limit anlayışını fərqləndirmək lazımdır. Əvvəlcə də qeyd etdiyimiz kimi limit nöqtəsi ardıcıllıqlara xas bir anlayışdır. Ümumiyyətlə "funksiyanın limit nöqtəsi" anlayışı yoxdur. Çünki, ola bilər ki, funksiya limit nöqtəsində təyin olunmasın. Ona görə də funksiyalarda limit anlayışını belə başa düşürlər:

Tutaq ki, bizə hər hansı X çoxluğunda təyin olunan $f(x)$ *funksiyası verilmişdir. Onda , əgər elə* $A \in (-\infty, +\infty)$ *varsa ki,* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0$ *olarsa ki,* $\forall x \in X \cap [(a-\delta, a+\delta)/\{a\}]$ *üçün*

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənsin, onda deyirlər ki, $f(x)$ *funksiyası* $x \to a$ *olduqda, A ədədinə yığılır və* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *kimi işarə olunur.* Qeyd edək ki, $f(x)$ funksiyası *a* nöqtəsində təyin oluna da bilər olunmaya da.

Bir daha limit nöqtəsinin xassələrini qeyd edək:

- *Ədədi ardıcıllığın birdən artıq limiti ola bilməz.*
- *Əgər ardıcıllığın limiti varsa, onda o, məhduddur.*
- *İstənilən yuxarıdan(aşağıdan) məhdud monoton artan(monoton azalan) ardıcıllığının limiti var.*
- *Monoton artan ardıcıllığın yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt verilmiş ardıcıllığın yuxarıdan məhdud olmasıdır.* Analoji hökm monoton azalan ardıcıllıqlar üçün də doğrudur.
- *İstənilən məhdud ardıcıllıqdan yığılan alt ardıcıllıq ayırmaq olar*(Bolsano-Veyerştrass teoremi).
- *Ardıcıllığın yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt onun fundamental olmasıdır*(Koşi kriteriyası).
- *a ədədinin* $\{x_n\}$ *ardıcıllığının limiti olması üçün zəruri və kafi şərt* $x_n = a + \alpha_n,\ n = 1, 2, ...,$ *olmasıdır, harada ki,* $\{\alpha_n\}$ *sonsuz kiçik ardıcıllıqdır.*

- *Əgər verilmiş iki ardıcıllıq yığılarsa, onda onların cəmi, fərqi, hasili və nisbəti də yığılandır.*

Limit Riyazi analizin demək olar ki bütün mövzularının əsasını təşkil edir. Limit törəmələrdə, inteqrallarda, qrafiklərin qurulmasında, fiqurların sahə və həcmlərinin kifayət qədər dəqiqliklə hesablanmasında, funksiyaların kəsilmə nöqtələrinin, sıraların araşdırılmasında və s. sahələrdə çox geniş istifadə olunur.

Plan

1. Giriş
2. Ardıcıllıqların limitinin araşdırılması və onun bəzi xassələri
3. Monoton ardıcıllıqların limiti
4. Bolsano-Veyerştrass teoremi və Koşi kriteriyası
5. Sonsuz böyük və sonsuz kiçik ardıcıllıqlar
6. Ardıcıllıqlar üzərində cəbri əməliyyatlarla bağlı limitin xassələri.
7. Nəticə

Ədəbiyyatların siyahısı

1. Л. Д. Кудрявцев. Математический анализ. Москва. Наука.
2. С. М. Никольский. Курс математического анализа. Москва. Наука.
3. Г. М. Фихтенгольц. Курс диференциального и интегральново исчисления. Москва. Наука.
4. Словарь иностранных слов. Под редакцией И.В.Лёхина и проф. Ф. Н. Петрова. Москва.