Mövzu 1. Matrislər və determinantlar.

Plan

§1. Matris anlayışı.

§2. Matrislər üzərində əməllər və onların xassələri.

§3. Matrisin transponirə olunması.

§4. Determinant anlayışı.

§5. Determinantın əsas xassələri. Determinantın sətir və ya sütuna görə ayrılışı.

§6. Tərs matris və onun tapılması.

§1. Matris anlayışı.

Tutaq ki, m və n natural ədədlərdir, $m \cdot n$ sayda ədəddən düzbucaqlı şəklində düzəldilmiş m sayda sətri və n sayda sütunu olan cədvələ $(m \times n)$ – ölçülü matris deyilir. Matrisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

şəklində yazırlar. Bəzən qısa olmaq üçün matrisi böyük hərflə (A, B, C, X, Y, ...) və ya a_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) şəklində işarə edirlər.

Matrisi təşkil edən a_{ij} ədədlərinə onun elementləri deyilir. Elementin aşağısında yazılan iki (ij) indeksdən birincisi (i) həmin elementin yerləşdiyi sətrin nömrəsini, ikincisi (j) isə onun yerləşdiyi sütunun nömrəsini göstərir.

$(m \times n)$ – ölçülü (1) matrisinin sətir və sütunlarının sayı bərabər olduqda $(m = n)$ ona kvadrat matris deyilir. Bu halda n ədədinə kvadrat matrisin tərtibi deyilir. Məsələn,

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ – ikitərtibli matris, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ – üçtərtibli matris.

Eyni ölçülü və bütün uyğun elementləri bərabər olan matrislərə bərabər matrislər deyilir.

Bir elementdən ibarət olan matrisə birtərtibli matris deyilir. Ancaq bir sətri olan matrisə sətir-matris

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

ancaq bir sütunu olan matrisə isə sütun-matris deyilir

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

n tərtibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

kvadrat matrisinin yuxarı sol küncündə yerləşən a_{11} elementi ilə aşağı sağ küncündəki a_{nn} elementini birləşdirən düz xətt parçası üzərində yerləşən $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elementləri çoxluğu həmin matrisin baş diaqonalı adlanır. Yalnız baş diaqonal elementləri sıfırdan fərqli olan kvadrat matrisə diaqonal matris deyilir. Bütün elementləri vahidə bərabər olan diaqonal matris vahid matris adlanır:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bütün elementləri sıfra bərabər olan kvadrat matrisə sıfır matris deyilir və O ilə işarə olunur. Məsələn,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§2. Matrislər üzərində əməllər və onların xassələri.

1. Matrislərin cəmi. Eyni $(m \times n)$ – ölçülü $A=(a_{ij})$ və $B=(b_{ij})$ $(i=\overline{1,m}\,;\ j=\overline{1,n})$ matrislərinin cəmi həmin ölçülü və hədləri

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i=\overline{1,m}\,;\ j=\overline{1,n}) \qquad (1)$$

kimi təyin olunan $C=(c_{ij})$ matrisinə deyilir və $C=A+B$ ilə işarə olunur.

Tərifdən aydındır ki, matrislərin toplanması yerdəyişmə və qruplaşdırma xassələrinə malikdir, yəni eyniölçülü A, B və C matrisləri üçün

$$A+B=B+A,$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

münasibətləri doğrudur. Eyniölçülü A matrisi və O sıfır matrisi üçün həmişə $A+O=A$ münasibəti doğrudur.

2. Matrislərin fərqi. Eyniölçülü A və B matrislərinin fərqi həmin ölçülü elə C matrisinə deyilir ki, onu B ilə topladıqda A-ya bərabər olsun: $A=C+B$. A və B matrislərinin fərqini $A-B=C$ ($c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$) ilə işarə edirlər. Aydındır ki, həmişə $A-A=0$.

3. Matrisin ədədə vurulması. Verilmiş $A=(a_{ij})$ ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$) matrisinin həqiqi λ ədədinə hasili hədləri $b_{ij}=\lambda a_{ij}$ ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$) kimi təyin olunan $B=(\lambda a_{ij})$ matrisinə deyilir və $B=\lambda A$ ilə işarə olunur. Aydındır ki, ixtiyari A, B matrisləri və λ, μ ədədləri üçün

$$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A),\quad \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B,$$

$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$$

xassələri doğrudur. Bundan başqa

$$(A+B)^*=A^*+B^*,\quad (\lambda A)^*=\lambda A^*.$$

4. İki matrisin hasili. $(m\times n)$ ölçülü $A=(a_{ij})$ ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$) matrisinin $(n\times k)$ ölçülü $B=(b_{ij})$ ($i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,k}$) matrisinə hasili hədləri

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pj}\quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k})$$

kimi təyin olunan $(m\times p)$ ölçülü $C=(c_{ij})$ ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,k}$) matrisinə iki matrisin hasili deyilir və $C=AB$ ilə işarə olunur.

Tərifdən aydındır ki, ixtiyari ölçülü iki matrisi vurmaq olmaz. A matrisini o zaman B matrisinə vurmaq olar ki, A-nın sütunlarının sayı B-nin sətirlərinin sayına bərabər olsun.

Xüsusi halda

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Qeyd edək ki, eynitərtibli A və B kvadrat matrislərinin hasili üçün yerdəyişmə xassəsi doğru deyil: $AB \neq BA$. Lakin istənilən A kvadrat matrisi ilə eynitərtibli olan I vahid və O sıfır matrislərinin hasili üçün yerdəyişmə xassəsi həmişə doğrudur

$$IA = AI = A,$$

$$OA = AO = O.$$

Matrislərin hasilinin bir sıra başqa xassələri də vardır. Məsələn, ixtiyari A, B, C matrisləri və həqiqi λ ədədi üçün

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB),$$

$$(A+B)C = AC + BC,$$

$$C(A+B) = CA + CB,$$

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

bərabərlikləri doğrudur.

§3. Matrisin transponirə olunması.

Verilmiş A matrisinin bütün uyğun sətir və sütunlarının yerinin dəyişdirilməsinə (nömrəsi saxlanmaqla) həmin matrisin çevrilməsi və ya transponirə edilməsi deyilir və A^* ilə işarə olunur. Məsələn,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aydındır ki, $(A^*)^* = A$. $A = A^*$ olduqda A matrisinə simmetrik matris deyilir. (2) matrisinin simmetrik olması şərtini $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = \overline{1, n})$ kimi yazmaq olar. $a_{ij} = -a_{ji}$ olduqda A matrisinə çəpsimmetrik matris deyilir.

§4. **Determinant anlayışı.**

Əvvəlcə ikitərtibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

matrisinə baxaq. Bu matrisin elementlərindən düzəldilmiş $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ fərqinə (1) matrisinin determinantı (və ya sadəcə olaraq ikitərtibli determinant) deyilir və

$$\det A = \Delta A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (2)$$

kimi işarə olunur.

Üçtərtibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

matrisinin elementlərindən düzəldilmiş

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$- a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \qquad (4)$$

ifadəsinə üçtərtibli determinant deyilir. (4) ifadəsinə determinantın açılışı deyilir.

§5. **Determinantın əsas xassələri. Determinantın sətir və ya sütuna görə ayrılışı.**

Minor və cəbri tamamlayıcı. Matris kimi determinantlar da sətir və sütunlardan ibarətdir. n tərtibli determinantın hər hansı elementinin yerləşdiyi sətir və sütunu sildikdən sonra yerdə qalan elementlər $n-1$ tərtibli bir determinant əmələ gətirir. Bu determinanta həmin elementin minoru deyilir. a_{ij} elementinin minorunu M_{ij} ilə işarə edirlər. M_{ij} minorunun $(-1)^{i+j}$ vuruğu ilə hasilinə a_{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısı deyilir və

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

kimi işarə olunur.

1. Determinantın bütün uyğun sətir və sütunlarının yerini dəyişdikdə onun qiyməti dəyişməz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Determinantın iki qonşu sətrinin (və ya sütununun) bir-biri ilə yerini dəyişdikdə determinantın ancaq işarəsi dəyişər.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

3. İki sətri (sütunu) eyni olan determinant sıfra bərabərdir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{33} + a_{12}a_{13}a_{31} + a_{11}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{12}a_{31} -$$

$$- a_{11}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}a_{11} = 0.$$

4. Determinantın hər hansı bir sətrinin (sütununun) bütün elementləri sıfır olduqda determinant sıfra bərabər olar.

5. Determinantın hər hansı bir sətir (sütun) elementlərinin ortaq vuruğu olarsa, onda həmin vuruğu determinantın xaricinə çıxarmaq olar.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. Determinantın iki sətri (sütunu) mütənasib olarsa, onda determinant sıfra bərabər olar.

$$\begin{vmatrix} 25 & 10 & 45 \\ 10 & 4 & 18 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 9 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

7. Determinantın hər hansı bir sətrinin bütün elementləri iki ədədin cəmi kimi verildikdə, həmin determinant iki determinantın cəminə bərabər olar, bu determinantların birində həmin sətir elementləri olaraq birinci toplananlar, o birində isə həmin sətir elementləri olaraq ikinci toplananlar götürülür:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

8. Determinantın hər hansı sətrinin (sütununun) bütün elementlərini bir ədədə vurub onun başqa bir sətrinin (sütununun) uyğun elementləri üzərinə əlavə etsək, determinant dəyişməz.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_{\cdot(k)} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} & a_{13}+ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

9. Hər bir determinant hər hansı bir sətir və ya sütun elementlərinin öz cəbri tamamlayıcıları ilə hasillərinin cəminə bərabərdir.

Determinantın i sətrinə görə ayrılışı

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = \overline{1,n}),$$

j sütununa görə ayrılışı isə

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j = \overline{1,n})$$

olar.

10. Determinantın hər hansı bir sətir və ya sütun elementlərinin başqa bir sətir və ya sütunun uyğun cəbri tamamlayıcıları ilə hasillərinin cəmi sıfra bərabərdir.

§6. Tərs matris və onun tapılması.

Tutaq ki, A hər hansı tərtibli kvadrat matris və I həmin tərtibli vahid matrisdir. Bu halda

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \qquad (1)$$

bərabərliyini ödəyən A^{-1} matrisinə A matrisinin tərsi deyilir. (1) bərabərliyi göstərir ki, A^{-1} matrisi A matrisinin tərsidirsə, onda A matrisi də A^{-1} matrisinin tərsidir:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A, \qquad (2)$$

yəni A və A^{-1} matrisləri qarşılıqlı tərs matrislərdir. A matrisinin yalnız və yalnız bir tərs matrisi ola bilər. Verilmiş A matrisinin A^{-1} tərs matrisinin olması üçün onun Δ determinantının sıfırdan fərqli olması zəruri və kafi şərtdir. Deməli, determinantı sıfırdan fərqli ($\Delta \neq 0$) olan ixtiyari

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

kvadrat matrisinin yeganə tərs matrisi var:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

burada A_{ij} – A matrisin a_{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısıdır. Qeyd edək ki, (4) düsturunda A matrisinin hər bir sətir elementlərinin cəbri tamamlayıcıları həmin nömrəli sütuna yazılmışdır.