Mövzu 2. Xətti tənliklər sistemi.

Plan

§1. Xətti tənliklər sistemi haqqında anlayış.

§2. n məchullu n xətti tənlik sistemi. Kramer üsulu.

§3. Xətti tənliklər sisteminin matris üsulu ilə həlli.

§4. Qauss üsulu.

§1. Xətti tənliklər sistemi haqqında anlayış.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

şəklində olan sistem n məchullu m xətti tənliklər sistemi və ya xətti sistem adlanır, burada a_{ij}, b_i ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$) – ədədlərdir. Tənliklərin sağ tərəflərindəki $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ədədlərinin hamısı sıfra bərabər olarsa, onda həmin sistemə bircins xətti tənliklər sistemi deyilir. $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ədədlərinin heç olmasa biri sıfırdan fərqli olduqda (1) sisteminə bircins olmayan xətti tənliklər sistemi deyilir. Sistemə daxil olan tənliklərin hər birini ödəyən $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$ qiymətlər çoxluğuna həmin sistemin həlli deyilir.

Verilmiş sistemin həlli ola da bilər, olmaya da bilər; sistemin həlli varsa, ona uyuşan və ya birgə sistem, əks halda isə uyuşmayan və ya birgə olmayan sistem deyilir. Tənliklər sistemi uyuşan olduqda onun bir və ya birdən çox həlli ola bilər. Tənliklərin sayı məchulların sayına bərabər olanda sistemə kvadrat sistem deyilir.

(1) xətti tənliklər sistemini matris tənliyi şəklində yazmaq olar.

Məchulların əmsallarından düzəlmiş matrisi A, sağ tərəfdəki məlum ədədlərdən düzəlmiş sütun-matrisi B, axtarılan məchullardan düzəlmiş sütun-matrisi isə X ilə işarə edək:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . \; . & . \; . & . \; . & . \; . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

A matrisin sütunlarının sayı X matrisinin sətirlərinin sayına bərabər olduqdan, AX hasilini tapa bilərik

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

(1) tənliklər sisteminin sağ tərəfi B sütun-matrisin elementləridir və buna görə də matrislərin bərabərliyi şərtinə əsasən

$$AX = B \qquad (2)$$

yazmaq olar. (2) tənliyinə matris-tənlik deyilir.

§2. **n məchullu n xətti tənlik sistemi. Kramer üsulu.**

Tutaq ki, kvadrat xətti tənliklər sistemi (yəni n məchullu n tənlik) verilmişdir

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

və əsas matirisin determinantı sıfırdan fərqlidir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 . \qquad (2)$$

Tutaq ki, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (1) sisteminin hər hansı bir həllidir. Onda (1) bərabərliklərini uyğun olaraq əsas matrisin Δ determinantının hər hansı j sütunun ($j = \overline{1, n}$) elementlərinin $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj}$ cəbri tamamlayıcılarına vurub və sonra alınan bərabərlikləri toplasaq alarıq:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} \right) = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj} .$$

Burada i sütun elementlərinin j sütunun elementlərinin uyğun cəbri tamamlayıcılarına hasillərinin cəmi $i \neq j$ olanda sıfra və $i = j$ olanda determinanta bərabər olmasını nəzərə alsaq son bərabərlikdən alarıq

$$x_j\Delta = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj} . \qquad (3)$$

Əsas matrisin determinantından j sütununu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sabit hədlər sütunu ilə əvəz etməklə (Δ-nın bütün başqa sütunlarını saxlamaq şərti ilə) alınan determinantı Δ_j ilə işarə edək.

Qeyd edək ki, (3)-ün sağ tərəfində elə həmin Δ_j determinantı durur və bu bərabərlik aşağıdakı şəkilə düşər:

$$x_j\Delta = \Delta_j \quad (j = \overline{1, n}). \qquad (4)$$

Əsas matrisin Δ determinantı sıfırdan fərqli olduğundan (4) bərabərlikləri aşağıdakı nisbətlərə ekvivalentdirlər

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = \overline{1, n}). \qquad (5)$$

Beləliklə, əsas matrisinin (2) determinantı sıfırdan fərqli olan (1) sisteminin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ həlləri birqiymətli olaraq (5) düsturları vasitəsilə təyin edilir. Bu düsturlar Kramer düsturları adlanırlar.

§3. **Xətti tənliklər sisteminin matris üsulu ilə həlli.**

Tutaq ki, n məchullu n xətti tənliklər sistemi verilmişdir

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

və məchulların əmsallarından düzəlmiş əsas matrisin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

determinantı sıfırdan fərqlidir.

(1) sistemini ona ekvivalent olan matris tənliyi ilə əvəz edək

$$AX = B\,, \tag{3}$$

burada A – sistemin əsas matrisi, X və B isə sütun-matrislərdir

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A matrisinin Δ determinantı sıfırdan fərqli olduğu üçün onun A^{-1} tərs matrisi var. Tutaq ki, (1) sistemin həlli var, yəni (3) matris tənliyini eyniliyə çevirən X sütunu vardır. Bu halda (3) tənliyinin hər iki tərəfini soldan A^{-1} matrisinə vursaq, alarıq

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B\,. \tag{4}$$

Buradan üç matrisin hasilinin xassəsini və $A^{-1}A = I$ (burada I vahid matrisidir) olduğunu nəzərə alsaq onda

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = IX = X\,.$$

Nəticədə, (4) düsurundan alarıq ki,

$$X = A^{-1}B\,. \tag{5}$$

Beləliklə, isbat etdik ki, (3) matris tənliyinin həlli varsa, onda o (5) münasibəti ilə birqiymətli təyin edilir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, (5) münasibəti ilə təyin edilən X sütunu doğrudan da (3) matris tənliyinin həllidir, yəni bu tənliyi eyniliyə çevirir. Doğrudan da, əgər X matrisi (5) münasibəti ilə təyin edilərsə, onda

$$AX = A(A^{-1}B) = AA^{-1}B = IB = B\,.$$

Deməli, əgər A matrisinin determinantı sıfırdan fərqli olarsa, onda (5) münasibəti ilə təyin edilən (3) matris tənliyinin yeganə həlli vardır.

§4. **Qauss üsulu.**

Tutaq ki, kvadrat xətti tənliklər sistemi verilmişdir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \,, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \,. \end{cases} \qquad (1)$$

Bu sistemin həlli üçün istifadə edilən məchulların yox edilməsi üsulunun və ya Qauss üsulunun mahiyyəti aşağıdakı kimidir. Tutaq ki, $a_{11} \neq 0$. Onda sistemin birinci tənliyinin hər iki tərəfini $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ədədinə vuraraq, alınan

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}a_{21}}{a_{11}}x_n = b_1\frac{a_{21}}{a_{11}}$$

tənliyini sistemin ikinci tənliyindən tərəf-tərəfə çıxaq. Aldığımız tənlikdə x_1 məchulu iştirak etmir:

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2.$$

Sonra sistemin birinci tənliyinin hər iki tərəfini $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ ədədinə vuraraq alınan tənliyi sistemin üçüncü tənliyindən tərəf-tərəfə çıxaq. Bu mühakiməni ardıcıl tətbiq etməklə (1) sistemini

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases} \tag{2}$$

şəklində sistemə gətirmək olar. Aldığımız yeni sistemin 2-ci, 3-cü və s. tənliklərindən istifadə etməklə yuxarıda göstərdiyimiz üsulla x_2 məchulunu da yox etmək olar. Bu mühakiməni ardıcıl olaraq tətbiq etməklə (1) sistemini ona ekvivalent olan

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \tag{3}$$

tənliklər sisteminə gətirmək olar. (3) sisteminə pilləvari (və ya pillələr şəklində) sistem deyilir. Sonuncu tənlikdən x_n məchulu tapılır, sonra yuxarı qalxaraq x_{n-1} və bu qayda ilə davam edərək birinci tənlikdən x_1 məchulunu tapırıq. (1) sistemini Qauss üsulu ilə həll edərkən tənliklər üzərində aparılan əməlləri bəzən onların əmsallarından düzəlmiş

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

matrisi üzərində aparmaq daha münasib olur. Belə matris genişlənmiş matris adlanır.