



**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ  
BAKİ BİZNES UNİVERSİTETİ**

---

**FAKÜLTƏ: Biznes və menecement**

**KAFEDRA: Ali riyaziyyat və texniki fənlər kafedrası**

**İXTİSAS: Dövlət və bələdiyyə idarəetməsi**

**QRUP: 10**

**KURS: I**

**FƏNN: Ali riyaziyyat**

**MÖVZU:**

**“Sadə diferensial tənliklərə gətirilə bilən məsələlər”**

## ***REFERAT***

**Fənn müəllimi: dos. S.Əzizov**

**Tələbə: İ.Dadaşov**

**Bakı-2011**

## PLAN

- 1.Ümumi anlayışlar və təriflər.**
- 2.Dəyişələrinə ayrılan diferensial tənliklər.**
- 3.Bircins diferensial tənliklər.**
- 4.Birtərtibli xətti diferensial tənliklər.**
- 5.Diferensial hesabının əsas teoremləri.**
- 6.Ədəbiyyat siyahısı.**

## 1. Ümumi anlayışlar və təriflər.

Diferensial tənliklər kursu riyazi fənnlər arasında mühüm yer tutur. Bu da təsadüf deyil. Çünki həyatda baş verən bəzi hadisələr, geden proseslər, elmin, texnikanın bir çox məsələləri diferensial tənliklərə gətirilərək həll olunur.

Diferensial tənliklər adi və xüsusi törəməli tənliklərə bölünür. Birdəyişənli funksiyanın törəmələri daxil olan tənliklər adi diferensial tənliklər, çoxdəyişənli funksiyanın xüsusi törəmələri daxil olan tənliklər xüsusi törəməli diferensial tənliklər adlanır.

Tərif. İxtiyari  $x$  dəyişəni, onun  $y = y(x)$  funksiyası və bu funksiyanın həmin  $x$  dəyişəninə nəzərən  $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$  törəmələri daxil olan tənliyə adi diferensial tənlik deyilir.

Diferensial tənliyə daxil olan ən yüksək tərtibli törəmənin tərtibinə həmin diferensial tənliyin tərtibi deyilir.  $n$ -tərtibli adi diferensial tənlik ümumi şəkildə aşağıdakı kimi yazılır

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

(1) diferensial tənliyini eyniliyə çevirən  $y = \varphi(x)$  funksiyasına həmin tənliyin həlli deyilir. Bu, o deməkdir ki,  $y = \varphi(x)$  funksiyasını və onun  $\varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$  törəmələrini (1) tənliyində yerinə yazdıqda həmin tənlik  $x$ -ə nəzərən eyniliyə çevrilir.

$n$ -tərtibli diferensial tənliyin ümumi həlli  $n$  sayda ixtiyari sabitin daxil olduğu elə

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (2)$$

həllinə deyilir ki, o verilmiş tənliyi eyniliyə çevirsin.

Diferensial tənliyin ümumi həllinə daxil olan ixtiyari sabitlərin müəyyən qiymətlərində alınan hər bir həlli diferensial tənliyin xüsusi həlli adlanır.

Verilmiş diferensial tənliyi ödəyən funksiya (həll) qeyri-aşkar

və parametrik şəkildə də verilə bilər. Bu halda həmin funksiya bəzən diferensial tənliyin inteqralı deyildir. Diferensial tənliyin həllinin qrafiki inteqral əyrisi adlanır.

$F(x, y, y') = 0$  şəklində yazılan tənliyə Birtərtibli diferensial tənlik deyilir.

Bu tənliyi axtarılan funksiyanın  $y'$  törəməsinə nəzərən həll etmək mümkün olduqda

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

şəklində törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli diferensial tənlik alınır.

(1) tənliyinin ümumi həlli

$$y = \varphi(x, C) \quad (2)$$

şəklindədir. Burada  $C$  ixtiyari sabitdir. Həndəsi olaraq (2) ümumi həll inteqral əyriləri ailəsindən ibarətdir, yəni  $C$  sabitinin müxtəlif qiymətlərinə uyğun olan xətlər toplusudur. İnteqral əyriləri belə bir xassəyə malikdirlər ki, onların hər bir  $M(x, y)$  nöqtəsində toxunanın meyl bucağı

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$$

şərtini ödəyir.

Əgər inteqral əyrisinin keçdiyi  $M_0(x_0, y_0)$  nöqtəsini versək, onda bununla sonsuz inteqral əyriləri ailəsindən müəyyən bir inteqral əyrisi seçilir və bu bizim diferensial tənliyin xüsusi həllinə uyğundur.

Analitik olaraq bu tələb  $x = x_0$  olduqda  $y = y_0$  başlanğıc adlanan şərtə gətirilir. Əgər (2) ümumi həll məlumdursa, onda alırıq ki,

$$y_0 = \varphi(x_0, C).$$

Bu şərtədən  $C$  sabitini müəyyən etmək olar və nəticədə, uyğun xüsusi həlli tapmaq olar. Koşi məsələsi bundan ibarətdir.

Koşi məsələsi. (1) diferensial tənliyinin  $y_0 = \varphi(x_0)$  başlanğıc

şərti ödəyən, yəni arqumentin  $x = x_0$  qiymətində verilmiş  $y = y_0$  qiymətini alan  $y = \varphi(x)$  həllini tapın.

Koşi məsələsini həndəsi olaraq belə ifadə etmək olar: (1) diferensial tənliyinin verilmiş  $M_0(x_0, y_0)$  nöqtəsindən keçən integral əyrisini tapın.

Qeyd edək ki, törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli diferensial tənliyi həmişə

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

diferensial şəkildə yazmaq olar. Doğrudan da (2) tənliyini

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad f(x, y)dx - dy = 0$$

kimi yazıb, orada  $M(x, y) = f(x, y)$  və  $N(x, y) = 1$  qəbul etsək (3) şəklində diferensial tənlik alınar.

$z = f(x, y)$  funksiyası tam artımının tərifinə görə

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (1)$$

Fərz edək ki, baxılan  $(x, y)$  nöqtəsində  $z = f(x, y)$  funksiyasının birinci tərtib kəsilməz xüsusi törəməsi var. (1) bərabərliyinin sağ tərəfinə  $f(x, y + \Delta y)$  ifadəsini əlavə edək və çıxaraq:

$$\begin{aligned} \Delta z &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + \\ &+ [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Hər bir kvadrat mötərizəyə Lagranj düsturunu tətbiq edək.

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x, \quad (3)$$

burada  $\bar{x}$  ədədi  $x$  ilə  $x + \Delta x$  arasındadır;

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \Delta y, \quad (4)$$

burada  $\bar{y}$  ədədi  $y$  ilə  $y + \Delta y$  arasındadır.

(3) və (4) ifadələrini (2) bərabərliyində yerinə yazaq:

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \Delta y. \quad (5)$$

Fərziyyəyə görə xüsusi törəmələr kəsilməz olduqlarından

$$\begin{cases} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \\ \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \end{cases} \quad (6)$$

Limitin tərifinə əsasən (6) bərabərsizliklərini

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \gamma_1, \\ \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \gamma_2 \end{cases} \quad (6')$$

şəklində yazmaq olar; burada  $\Delta x$  və  $\Delta y$  sıfıra yaxınlaşanda  $\gamma_1$  və  $\gamma_2$  da sıfıra yaxınlaşır. (6') bərabərsizliklərinə əsasən (5) münasibəti

$$\Delta z = \left[ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y \right] + [\gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y] \quad (7)$$

şəklini alar.

Birinci iki həddin cəmi  $\Delta x$  və  $\Delta y$  kəmiyyətlərinə nəzərən xəttidir. Bu cəm  $\Delta z$  artımından sonsuz kiçilən qədər fərqlənməklə, həmin artımın baş hissəsini təşkil edir.

Tərif. Verilmiş  $(x, y)$  nöqtəsindəki  $\Delta z$  tam artımı aşağıdakı kimi iki həddin cəmi şəklində göstərilə bilən  $z = f(x, y)$  funksiyasına həmin nöqtədə diferensialana bilən funksiya deyilir; burada hədd adlandırdığımız birinci ifadə  $\Delta x$  və  $\Delta y$  artımlarına nəzərən xəttidir, ikinci hədd isə yüksəktərtibli sonsuz kiçiləndir. Tam artımın xətti hissəsinə funksiyanın tam diferensialı deyilir və  $dz$  yaxud  $df$  ilə işarə edilir

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Sərbəst dəyişənlərin  $\Delta x$  və  $\Delta y$  artımlarını  $x$  və  $y$

dəyişənlərinin diferensialları adlandıraraq və uyğun olaraq  $dx$  və  $dy$  ilə işarə edək. Bu halda tam diferensialın ifadəsi

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (8)$$

şəklini alar.

## 2. Dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənliklər.

1. Tutaq ki,  $M(x)$  və  $N(y)$  funksiyaları uyğun olaraq  $(a,b)$  və  $(c,d)$  intervalında kəsilməzdir. Bu halda

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (1)$$

tənliyinə dəyişənlərinə ayrılmış diferensial tənlik deyilir. (1) tənliyində  $dx$ -in əmsalı ancaq  $x$ -dən,  $dy$ -in əmsalı ancaq  $y$ -dən asılıdır.

Fərz edək ki,  $y(x)$  funksiyası (1) tənliyinin həllidir. Onda həmin funksiya (1) tənliyini eyniliyə çevirir:

$$M(x)dx + N(y)dy \equiv 0. \quad (2)$$

Bu eyniliyi inteqralladıqda

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \quad (3)$$

münasibəti alınar, burada  $S$  ixtiyari sabitdir. Buradan aydındır ki, (3) tənliyi (1) tənliyinin bütün həllərini təyin edir. Buna görə də (3) münasibətinə (1) tənliyinin ümumi inteqralı deyilir.

2. Fərz edək ki,  $M_1(x)$ ,  $M_2(x)$ ,  $N_1(y)$ ,  $N_2(y)$  funksiyaları kəsilməzdir. Bu halda

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (4)$$

tənliyinə dəyişənlərinə ayrılan tənlik deyilir. Bu tənliyi həll etmək üçün onun hər iki tərəfini  $N_1(y)M_2(x) \neq 0$  hasilinə bölək:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0.$$

Dəyişənlərinə ayrılmış bu tənliyin ümumi inteqralı

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C \quad (5)$$

olar. (4) tənliyinin (5) ümumi inteqralından alınmayan başqa həlləri də ola bilər. Belə həllər  $N_1(y) M_2(x) = 0$  bərabərliyinin ödənilmədiyi nöqtələr içərisində olar ( $N_1(y) = 0, M_2(x) = 0$ ).

Misal.  $x = 5, y = 1$  başlanğıc şərtini ödəyən  $y' = \frac{1-x}{2+y}$  diferensial tənliyinin həllini tapmalı.

Həlli.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{2+y},$

$$(x-1)dx + (y+2)dy = 0,$$

$$\int (x-1)d(x-1) + \int (y+2)d(y+2) = C_1,$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = C^2 \quad (C^2 = 2C_1).$$

Mərkəzi  $O(1,-2)$  nöqtəsində olan çevrələr. Xüsusi həlli tapaq üçün  $x = 5, y = 1$  başlanğıc şərtlərdən istifadə edək:

$$(5-1)^2 + (1+2)^2 = C^2, \quad C^2 = 25.$$

Axtarılan xüsusi inteqral

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

çevrəni müəyyən edir.

### 3. Bircins diferensial tənliklər.

Tərif 1. Əgər hər bir  $k$  ədədi üçün

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y) \quad (1)$$

eyniliyi doğru olarsa, onda  $f(x, y)$  funksiyasına  $x$  və  $y$  dəyişənlərinə nəzərən  $n$  dərəcəli bircins funksiya deyilir.



İndi isə

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

diferensial tənliyinə baxaq.

Tərif 2. Əgər  $x$  və  $y$  dəyişənlərinin diferensiallarının  $M(x, y)$  və  $N(x, y)$  əmsalları eyni dərəcəli bircins funksiyalar olarsa, onda (2) tənliyi birtərtibli bircins diferensial tənlik adlanır.

Bu tənliyi həll etmək üçün  $\frac{y}{x} = z$ ,  $y = xz$ ,  $dy = xdz + zdx$  əvəzləməsi vasitəsilə onu dəyişənlərinə ayrılan tənliyə gətirmək lazımdır.

İndi tutaq ki, bircins diferensial tənlik aşağıdakı şəkildə verilmişdir

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (3)$$

Əgər  $f(x, y)$  funksiyası  $x$  və  $y$  dəyişənlərinə nəzərən sıfır dərəcəli bircins funksiya olarsa, yəni

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$$

şərti ödənilərsə, onda (3) tənliyi birtərtibli bircins diferensial tənlik olar.

Misal.  $xy' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$  diferensial tənliyinin ümumi həllini tapmalı.

Həlli.  $x \frac{dy}{dx} = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ ,

$$y \ln\left(\frac{y}{x}\right) dx - x dy = 0.$$

$M(x, y) = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$  və  $N(x, y) = -x$  birdərəcəli bircins funksiyalardır.

Doğrudan da,

$$M(kx, ky) = ky \ln\left(\frac{ky}{kx}\right) = ky \ln\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$N(kx, ky) = -kx.$$

Tənliyi həll etmək üçün  $\frac{y}{x} = z$ ,  $y = xz$ ,  $dy = xdz + zdx$  əvəzləməsini

aparsaq, alarıq

$$xz \ln z \cdot dx - x(xdz + zdx) = 0.$$

Buradan

$$xdz = z(\ln z - 1)dx,$$

$$x \frac{dz}{dx} = z(\ln z - 1),$$

$$\frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \frac{dx}{x},$$

$$\frac{d(\ln z - 1)}{\ln z - 1} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln(\ln z - 1) = \ln x + \ln C, \quad \ln z - 1 = Cx,$$

$$\ln z = Cx + 1, \quad \ln \frac{y}{x} = Cx + 1, \quad \frac{y}{x} = e^{Cx+1}.$$

Nəticədə baxılan tənliyin ümumi həlli  $y = xe^{Cx+1}$  olar.

#### 4. Birtərtibli xətti diferensial tənliklər.

Axtarılan funksiya və onun törəməsinə nəzərən xətti olan tənliyə birtərtibli xətti diferensial tənlik deyilir və aşağıdakı kimi yazılır

$$y' + p(x)y = f(x). \quad (1)$$

$f(x) \equiv 0$  olduqda alınan

$$y' + p(x)y = 0 \quad (2)$$

tənliyinə (1) tənliyinə uyğun xətti bircins tənlik deyilir.  $f(x) \neq 0$  olduqda (1) tənliyi xətti bircins olmayan diferensial tənlik adlanır. (1) tənliyini müxtəlif üsullarla həll etmək olar. Bu üsullardan biri sabitin variasiyası üsuludur. Bu üsula görə əvvəlcə xətti bircins tənliyin ümumi həlli tapılır. Alınan tənlik dəyişənlərinə ayrılır

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Sonuncu tənliyi inteqrallasaq

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|,$$

buradan isə (2) tənliyinin ümumi həllini alarıq:

$$y = C e^{-\int p(x)dx}. \quad (3)$$

İndi isə xətti bircins tənliyin (3) ümumi həllindəki ixtiyari  $C$  sabitini  $x$ -dən asılı  $C = C(x)$  funksiyası hesab edək:

$$y = C(x) e^{-\int p(x)dx}. \quad (4)$$

$y$ -in bu ifadəsini (1) tənliyində yerinə yazaraq sadə çevirmələrdən sonra alarıq

$$C'(x) = f(x) e^{\int p(x)dx}.$$

Buradan isə naməlum  $C(x)$  funksiyası tapılır

$$C(x) = \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

$C(x)$ -in bu ifadəsini (4) bərabərliyində yerinə yazdıqda (1) tənliyinin ümumi həlli alınar:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

Misal.  $y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x^2 + 1$  diferensial tənliyi həll edin.

Həlli. Əvvəlcə bircins olmayan

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x^2 + 1 \quad (5)$$

tənliyinin uyğun

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 0 \quad (6)$$

bircins tənliyini həll edək.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1}y, \quad \frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2+1}dx, \quad \frac{dy}{y} = \frac{d(x^2+1)}{x^2+1},$$

$$\ln y = \ln(x^2+1) + \ln C.$$

Axırıncı bərabərlikdən verilmiş bircins diferensial tənliyin ümumi

həllini tapırıq:  $y = C(x^2 + 1)$ . Burada  $C$  sabitini  $x$ -dən asılı  $C = C(x)$  funksiyası hesab edək, onda

$$y = C(x)(x^2 + 1). \quad (7)$$

$y$ -in bu ifadəsini (5) tənliyində yerinə yazsaq alarıq

$$C'(x)(x^2 + 1) + 2xC(x) - \frac{2x}{x^2 + 1}C(x)(x^2 + 1) = x^2 + 1.$$

Buradan  $C'(x) = 1$ , yaxud  $C(x) = x + C$ . Bu həlli (7) bərabərliyində yerinə yazdıqda (5) tənliyinin həllini alarıq

$$y = (x + C)(x^2 + 1).$$

## 5. Diferensial hesabının əsas teoremləri.

Roll teoremi. Əgər  $f(x)$  funksiyası  $[a, b]$  parçasında kəsilməzdirsə, həmin parçanın bütün daxili nöqtələrində diferensiallana biləndirsə və parçanın uclarında sıfıra çevrilirsə ( $f(a) = f(b) = 0$ ), onda  $[a, b]$  parçasının daxilində heç olmasa elə bir  $x = c$  nöqtəsi var ki, həmin nöqtədə  $f'(x)$  törəməsi sıfıra çevrilir, yəni  $f'(c) = 0$ ,  $a < c < b$ .

İsbatı.  $f(x)$  funksiyası  $[a, b]$  parçasında kəsilməz olduğu üçün, onun həmin parçada ən böyük  $M$  və ən kiçik  $m$  qiymətləri var.

Əgər  $M = m$  olarsa,  $f(x)$  sabitdir, yəni arqumentin bütün qiymətlərində funksiya eyni bir qiymət alır. Belə olduqda isə parçanın bütün nöqtələrində  $f'(x) = 0$  olar və teorem isbat olunur.

İndi fərz edək ki,  $M \neq m$ . Onda bu ədədlərdən heç olmasa biri sıfır deyil. Müəyyənlik üçün  $M > 0$  olduğunu və funksiyanın bu qiyməti  $x = c$  nöqtəsində aldığını qəbul edək, yəni  $f(c) = M$ . Qeyd edək ki,  $c$  ədədi nə  $a$  və nə də  $b$  ədədinə bərabər deyildir (çünki şərtə əsasən  $f(a) = f(b) = 0$ ).

$f(c)$  ədədi funksiyanın ən böyük qiyməti olduğundan, istər

$\Delta x > 0$  və istərsə  $\Delta x < 0$  olduqda  $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$  olmalıdır.

Buradan  $\Delta x > 0$  olduqda  $\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$ , (1')

$\Delta x < 0$  olduqda  $\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$  (1'')

alınar. Teoremin şərtinə əsasən  $x = c$  nöqtəsində törəmə vardır, ona görə də  $\Delta x \rightarrow 0$  şərtində limitə keçsək

$\Delta x > 0$  olduqda  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$ ,  $\Delta x < 0$  olduqda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$$

alırıq.

Digər tərəfdən  $f'(c) \leq 0$  və  $f'(c) \geq 0$  münasibətləri yalnız  $f'(c) = 0$  olduqda uyuşa bilirlər. Deməli,  $[a, b]$  parçasında elə  $c$  nöqtəsi var ki, həmin nöqtədə  $f'(x)$  sıfıra bərabərdir. Teorem isbat olundu.

Qeyd.  $[a, b]$  parçasının uclarında sıfıra çevrilməyən, lakin bərabər qiymətlər alan ( $f(a) = f(b)$ ) diferensiallana bilən funksiyalar üçün də isbat etdiyimiz teoremin hökmü doğrudur.

Laqranj teoremi. Əgər  $f(x)$  funksiyası  $[a, b]$  parçasında kəsilməz və bu parçanın bütün daxili nöqtələrində diferensiallana biləndirsə, onda  $[a, b]$  parçasının daxilində ən azı elə bir  $c$  nöqtəsi tapılar ki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad a < c < b \quad (2)$$

olar.

İsbatı.  $[a, b]$  parçasında

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (3)$$

bərabərliyi ilə təyin olunmuş köməkçi  $F(x)$  funksiyasına baxaq. Asanlıqla görmək olar ki,  $F(x)$  funksiyası: 1)  $[a, b]$  parçasında

kəsilməzdir (kəsilməz  $f(x)$  və xətti  $f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ )

funksiyaların fərqi kimi); 2)  $[a, b]$  parçasının daxilində diferensiallanandır

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

3) parçanın uclarında sıfır çevrilir, yəni  $F(a) = 0, F(b) = 0$ .

Deməli,  $F(x)$  funksiyasına Roll teoremini tətbiq etmək olar. Bu teoremə əsasən parça daxilində elə bir  $x=c$  nöqtəsi var ki,  $F'(c) = 0$ , yəni

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Buradan alırıq ki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Teorem isbat olundu.

Koşi teoremi. Tutaq ki,  $f(x)$  və  $g(x)$  funksiyaları  $[a, b]$  parçasında kəsilməz və onun bütün daxili nöqtələrində diferensiallanabiləndirlər, bundan başqa  $g'(x)$  törəməsi parçanın heç bir daxili nöqtəsində sıfır çevrilmir. Onda  $[a, b]$  parçasının daxilində elə bir  $c$  nöqtəsi tapılar ki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b \quad (3)$$

olar.

İsbatı. Əvvəlcə qeyd edək ki,  $g(b) - g(a) \neq 0$ , çünki əks halda  $g(b)$  və  $g(a)$  bərabər olar, onda Roll teoreminə əsasən parçanın daxilində elə bir  $c$  nöqtəsi var ki,  $g'(c) = 0$ . Bu isə teoremin  $g'(x) \neq 0$  şərtinə ziddir.

Köməkçi funksiya düzəldək

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Asanlıqla görmək olar ki,  $F(x)$  funksiyası  $[a, b]$  parçasında Roll teoreminin bütün şərtlərini ödəyir. Doğrudan da,  $F(x)$   $[a, b]$ -da kəsilməzdir,  $(a, b)$ -da diferensiallanandır və  $F(a) = F(b) = 0$ . Ona

görə də  $a$  və  $b$  ədədləri arasında elə bir  $x=c$  nöqtəsi var ki,  $F'(c) = 0$  ( $a < c < b$ ). Digər tərəfdən

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

Deməli,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

$g'(c) \neq 0$  olduğunu nəzərə alsaq buradan (4) düsturunu alarıq.

## ƏDƏBİYYAT

1. R. Məmmədov. Ali riyaziyyat kuru, I hissə, «Maarif», Bakı, 1978., II hissə 1981, III hissə 1984.
2. Məsimova S.N. Ali riyaziyyatın əsasları. Bakı, Yeni Nəsil, 2006.
3. Piskunov N.S. Diferensial və inteqral hesabı. Bakı. Maarif, I,II c., 1965.
4. Данго П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая юкола, в 2-х частях, 1986.
5. Кудряцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., Наука, 1989.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М., Наука, 1964.
7. Общий курс высшей математики для экономистов. Под ред. Ермакова В.И.М., Инфра –М, 2008.
8. Сборник задач по высшей математике для экономистов. Под ред. Ермакова В.И.М., Инфра –М, 2008.
9. Шипачев В.С. Высшая математика. М., Высшая школа, 1990.