AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI BİZNES UNİVERSİTETİ

FAKÜLTƏ: Biznes və menecement

KAFEDRA: Ali riyaziyyat və texniki fənlər kafedrası

İXTİSAS: Dövlət və bələdiyyə idarəetməsi

QRUP: 10

KURS: I

FƏNN: Ali riyaziyyat

MÖVZU:

"Sadə diferensial tənliklərə gətirilə bilən məsələlər"

REFERAT

Fənn müəllimi: **dos. S.Əzizov**

Tələbə: **İ.Dadaşov**

Bakı-2011

PLAN

1. **Ümumi anlayışlar və tariflər.**
2. **Dəyişələrinə ayrılan diferensial tənlikər.**
3. **Bircins diferensial tənliklər.**
4. **Birtərtibli xətti diferensial tənliklər.**
5. **Diferensial hesabının əsas teoremləri.**
6. **Ədəbiyyat siyahısı.**

1.Ümumi anlayışlar və təriflər.

Diferensial tənliklər kursu riyazi fənnlər arasında mühüm yer tutur.Bu da təsadüfü deyil.Çünki həyatda baş verən bəzi hadisələr, geden proseslər, elmin, texnikanın bir çox məsələləri diferensial tənlikərə gətirilərək həll olunur.

Diferensial tənliklər adi və xüsusi törəməli tənliklərə bölünür.Birdəyişənli funksiyanın törəmələri daxil olan tənliklər adi diferensial tənliklər, çoxdəyişənli funksiyanın xüsusi törəmələri daxil olan tənliklər xüsusi törəməli duferensial tənliklər adlanır.

Tərif. İxtiyari x dəyişəni, onun $y = y(x)$ funksiyası və bu funksiyanın həmin x dəyişəninə nəzərən $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ törəmələri daxil olan tənliyə adi diferensial tənlik deyilir.

Diferensial tənliyə daxil olan ən yüksək tərtibli törəmənin tərtibinə həmin diferensial tənliyin tərtibi deyilir. n-tərtibli adi diferensial tənlik ümumi şəkildə aşağıdakı kimi yazılır

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

(1) diferensial tənliyini eyniliyə çevirən $y = \varphi(x)$ funksiyasına həmin tənliyin həlli deyilir. Bu, o deməkdir ki, $y = \varphi(x)$ funksiyasını və onun $\varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ törəmələrini (1) tənliyində yerinə yazdıqda həmin tənlik x -ə nəzərən eyniliyə çevrilir.

n-tərtibli diferensial tənliyin ümumi həlli n sayda ixtiyari sabitin daxil olduğu elə

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad (2)$$

həllinə deyilir ki, o verilmiş tənliyi eyniliyə çevirsin.

Diferensial tənliyin ümumi həllinə daxil olan ixtiyari sabitlərin müəyyən qiymətlərində alınan hər bir həlli diferensial tənliyin xüsusi həlli adlanır.

Verilmiş diferensial tənliyi ödəyən funksiya (həll) qeyri-aşkar və parametrik şəkildə də verilə bilər. Bu halda həmin funksiyaya bəzən diferensial tənliyin inteqralı deyilir. Diferensial tənliyin həllinin qrafiki inteqral əyrisi adlanır.

$F(x, y, y') = 0$ şəklində yazılan tənliyə Birtərtibli diferensial tənlik deyilir.

Bu tənliyi axtarılan funksiyanın y' törəməsinə nəzərən həll etmək mümkün olduqda

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

şəklində törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli diferensial tənlik alınır.

(1) tənliyinin ümumi həlli

$$y = \varphi(x, C) \qquad (2)$$

şəklindədir. Burada C ixtiyari sabitdir. Həndəsi olaraq (2) ümumi həll inteqral əyriləri ailəsindən ibarətdir, yəni C sabitinin müxtəlif qiymətlərinə uyğun olan xətlər toplusudur. İnteqral əyriləri belə bir xassəyə malikdirlər ki, onların hər bir $M(x, y)$ nöqtəsində toxunanın meyl bucağı

$$\mathrm{tg}\alpha = f(x, y)$$

şərtini ödəyir.

Əgər inteqral əyrisinin keçdiyi $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsini versək, onda bununla sonsuz inteqral əyriləri ailəsindən müəyyən bir inteqral əyrisi seçilir və bu bizim diferensial tənliyin xüsusi həllinə uyğundur.

Analitik olaraq bu tələb $x = x_0$ olduqda $y = y_0$ başlanğıc adlanan şərtə gətirilir. Əgər (2) ümumi həll məlumdursa, onda alırıq ki,

$$y_0 = \varphi(x_0, C).$$

Bu şərtdən C sabitini müəyyən etmək olar və nəticədə, uyğun xüsusi həlli tapmaq olar. Koşi məsələsi bundan ibarətdir.

Koşi məsələsi. (1) diferensial tənliyinin $y_0 = \varphi(x_0)$ başlanğıc şərti ödəyən, yəni arqumentin $x = x_0$ qiymətində verilmiş $y = y_0$ qiymətini alan $y = \varphi(x)$ həllini tapın.

Koşi məsələsini həndəsi olaraq belə ifadə etmək olar: (1) diferensial tənliyinin verilmiş $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən inteqral əyrisini tapın.

Qeyd edək ki, törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli diferensial tənliyi həmişə

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (3)$$

diferensial şəkildə yazmaq olar. Doğrudan da (2) tənliyini

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \;\; f(x,y)dx - dy = 0$$

kimi yazıb, orada $M(x,y) = f(x,y)$ və $N(x,y) = 1$ qəbul etsək (3) şəklində diferensial tənlik alınar.

$z = f(x,y)$ funksiyası tam artımının tərifinə görə

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\,. \qquad (1)$$

Fərz edək ki, baxılan $(x,\ y)$ nöqtəsində $z = f(x,y)$ funksiyasının birinci tərtib kəsilməz xüsusi törəməsi var. (1) bərabərliyinin sağ tərəfinə $f(x, y+\Delta y)$ ifadəsini əlavə edək və çıxaq:

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] +$$

$$+[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]\,. \qquad (2)$$

Hər bir kvadrat mötərizəyə Laqranj düsturunu tətbiq edək.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x\,, \quad (3)$$

burada $\bar{x}$ ədədi x ilə $x+\Delta x$ arasındadır;

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}\Delta y\,, \qquad (4)$$

burada $\bar{y}$ ədədi y ilə $y+\Delta y$ arasındadır.

(3) və (4) ifadələrini (2) bərabərliyində yerinə yazaq:

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}\Delta y . \qquad (5)$$

Fərziyyəyə görə xüsusi törəmələr kəsilməz olduqlarından

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \\ \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}. \end{cases} \qquad (6)$$

Limitin tərifinə əsasən (6) bərabərsizliklərini

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \gamma_1, \\ \dfrac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \gamma_2 \end{cases} \qquad (6')$$

şəklində yazmaq olar; burada Δx və Δy sıfra yaxınlaşanda γ_1 və γ_2 da sıfra yaxınlaşır. $(6')$ bərabərsizliklərinə əsasən (5) münasibəti

$$\Delta z = \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y\right] + [\gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y] \quad (7)$$

şəklini alar.

Birinci iki həddin cəmi Δx və Δy kəmiyyətlərinə nəzərən xəttidir. Bu cəm Δz artımından sonsuz kiçilən qədər fərqlənməklə, həmin artımın baş hissəsini təşkil edir.

Tərif. Verilmiş (x, y) nöqtəsindəki Δz tam artımı aşağıdakı kimi iki həddin cəmi şəklində göstərilə bilən $z = f(x,y)$ funksiyasına həmin nöqtədə diferensiallana bilən funksiya deyilir; burada hədd adlandırdığımız birinci ifadə Δx və Δy artımlarına nəzərən xəttidir, ikinci hədd isə yüksəktərtibli sonsuz kiçiləndir. Tam artımın xətti hissəsinə funksiyanın tam diferensialı deyilir və dz yaxud df ilə işarə edilir

$$dz = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y.$$

Sərbəst dəyişənlərin Δx və Δy artımlarını x və y

dəyişənlərinin diferensialları adlandıraq və uyğun olaraq dx və dy ilə işarə edək. Bu halda tam diferensialın ifadəsi

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \qquad (8)$$

şəklini alar.

2.Dəyişələrinə ayrılan diferensial tənlikər.

1. Tutaq ki, $M(x)$ və $N(y)$ funksiyaları uyğun olaraq (a,b) və (c,d) intervalında kəsilməzdir. Bu halda

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (1)$$

tənliyinə dəyişənlərinə ayrılmış diferensial tənlik deyilir. (1) tənliyində dx-in əmsalı ancaq x-dən, dy-in əmsalı ancaq y-dən asılıdır.

Fərz edək ki, $y(x)$ funksiyası (1) tənliyinin həllidir. Onda həmin funksiya (1) tənliyini eyniliyə çevirir:

$$M(x)dx + N(y)dy \equiv 0. \qquad (2)$$

Bu eyniliyi inteqralladıqda

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \qquad (3)$$

münasibəti alınar, burada S ixtiyari sabitdir. Buradan aydındır ki, (3) tənliyi (1) tənliyinin bütün həllərini təyin edir. Buna görə də (3) münasibətinə (1) tənliyinin ümumi inteqralı deyilir.

2. Fərz edək ki, $M_1(x)$, $M_2(x)$, $N_1(y)$, $N_2(y)$ funksiyaları kəsilməzdir. Bu halda

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (4)$$

tənliyinə dəyişənlərinə ayrılan tənlik deyilir. Bu tənliyi həll etmək üçün onun hər iki tərəfini $N_1(y)\, M_2(x) \neq 0$ hasilinə bölək:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0.$$

Dəyişənlərinə ayrılmış bu tənliyin ümumi inteqralı

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C \qquad (5)$$

olar. (4) tənliyinin (5) ümumi inteqralından alınmayan başqa həlləri də ola bilər. Belə həllər $N_1(y)\ M_2(x) = 0$ bərabərliyinin ödənildiyi nöqtələr içərisində olar ($N_1(y) = 0, M_2(x) = 0$).

Misal. $x = 5$, $y = 1$ başlanğıc şərtini ödəyən $y' = \frac{1-x}{2+y}$ diferensial tənliyinin həllini tapmalı.

Həlli. $$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{2+y},$$

$$(x-1)dx+(y+2)dy=0\ ,$$

$$\int(x-1)d(x-1)+\int(y+2)d(y+2)=C_1,$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=C^2 \quad (C^2=2C_1).$$

Mərkəzi $O(1,-2)$ nöqtəsində olan çevrələr. Xüsusi həlli tapaq üçün $x = 5$, $y = 1$ başlanğıc şərtlərdən istifadə edək:

$$(5-1)^2+(1+2)^2=C^2,\ C^2=25.$$

Axtarılan xüsusi inteqral

$$(x-1)^2+(y+2)^2=25.$$

çevrəni müəyyən edir.

3.Bircins diferensial tənliklər.

Tərif 1. Əgər hər bir k ədədi üçün

$$f(kx,ky)=k^n f(x,y) \qquad (1)$$

eyniliyi doğru olarsa, onda $f(x,y)$ funksiyasına x və y dəyişənlərinə nəzərən n dərəcəli bircins funksiya deyilir.

İndi isə

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

diferensial tənliyinə baxaq.

Tərif 2. Əgər x və y dəyişənlərinin diferensiallarının $M(x,y)$ və $N(x,y)$ əmsalları eyni dərəcəli bircins funksiyalar olarsa, onda (2) tənliyi birtərtibli bircins diferensial tənlik adlanır.

Bu tənliyi həll etmək üçün $\frac{y}{x} = z$, $y = xz, dy = xdz + zdx$ əvəzləməsi vasitəsilə onu dəyişənlərinə ayrılan tənliyə gətirmək lazımdır.

İndi tutaq ki, bircins diferensial tənlik aşağıdakı şəkildə verilmişdir

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \qquad (3)$$

Əgər $f(x,y)$ funksiyası x və y dəyişənlərinə nəzərən sıfır dərəcəli bircins funksiya olarsa, yəni

$$f(tx,ty) = t^0 f(x,y) = f(x,y)$$

şərti ödənilərsə, onda (3) tənliyi birtərtibli bircins diferensial tənlik olar.

Misal. $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ diferensial tənliyinin ümumi həllini tapmalı.

Həlli. $$x\frac{dy}{dx} = y\ln\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$y\ln\left(\frac{y}{x}\right)dx - xdy = 0.$$

$M(x,y) = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ və $N(x,y) = -x$ birdərəcəli bircins funksiyalardır. Doğrudan da,

$$M(kx,ky) = ky\ln\left(\frac{ky}{kx}\right) = ky\ln\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$N(kx,ky) = -kx.$$

Tənliyi həll etmək üçun $\frac{y}{x} = z$, $y = xz$, $dy = xdz + zdx$ əvəzləməsini aparsaq, alarıq

$$xz\ \ln z\cdot dx - x(xdz+zdx)=0.$$

Buradan

$$xdz=z(\ln z-1)dx,$$

$$x\frac{dz}{dx}=z(\ln z-1),$$

$$\frac{dz}{z(\ln z-1)}=\frac{dx}{x},$$

$$\frac{d(\ln z-1)}{\ln z-1}=\frac{dx}{x},$$

$$\ln(\ln z-1)=\ln x+\ln C,\quad \ln z-1=Cx,$$

$$\ln z=Cx+1,\ \ln\frac{y}{x}=Cx+1,\ \frac{y}{x}=e^{Cx+1}.$$

Nəticədə baxılan tənliyin ümumi həlli $y=xe^{Cx+1}$ olar.

4.Birtərtibli xətti diferensial tənliklər.

Axtarılan funksiyaya və onun törəməsinə nəzərən xətti olan tənliyə birtərtibli xətti diferensial tənlik deyilir və aşağıdakı kimi yazılır

$$y'+p(x)y=f(x). \qquad (1)$$

$f(x)\equiv 0$ olduqda alınan

$$y'+p(x)y=0 \qquad (2)$$

tənliyinə (1) tənliyinə uyğun xətti bircins tənlik deyilir. $f(x)\neq 0$ olduqda (1) tənliyi xətti bircins olmayan diferensial tənlik adlanır. (1) tənliyini müxtəlif üsullarla həll etmək olar. Bu üsullardan biri sabitin variasiyası üsuludur. Bu üsula görə əvvəlcə xətti bircins tənliyin ümumi həlli tapılır. Alınan tənlik dəyişənlərinə ayrılır

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0,\qquad \frac{dy}{y}=-p(x)dx.$$

Sonuncu tənliyi inteqrallasaq

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|,$$

buradan isə (2) tənliyinin ümumi həllini alarıq:

$$y = C\,e^{-\int p(x)dx}. \qquad (3)$$

İndi isə xətti bircins tənliyin (3) ümumi həllindəki ixtiyari C sabitini x-dən asılı $C = C(x)$ funksiyası hesab edək:

$$y = C(x)\,e^{-\int p(x)dx}. \qquad (4)$$

y-in bu ifadəsini (1) tənliyində yerinə yazaraq sadə çevirmələrdən sonra alarıq

$$C'(x) = f(x)\,e^{\int p(x)dx}.$$

Buradan isə naməlum $C(x)$ funksiyası tapılır

$$C(x) = \int f(x)\,e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

$C(x)$-in bu ifadəsini (4) bərabərliyində yerinə yazdıqda (1) tənliyinin ümumi həlli alınar:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)\,e^{\int p(x)dx}dx + C\right].$$

Misal. $y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x^2 + 1$ diferensial tənliyi həll edin.

Həlli. Əvvəlcə bircins olmayan

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x^2 + 1 \qquad (5)$$

tənliyinin uyğun

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 0 \qquad (6)$$

bircins tənliyini həll edək.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1}y, \quad \frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2+1}dx, \quad \frac{dy}{y} = \frac{d(x^2+1)}{x^2+1},$$

$$\ln y = \ln(x^2+1) + \ln C.$$

Axırıncı bərabərlikdən verilmiş bircins diferensial tənliyin ümumi həllini tapırıq: $y = C(x^2+1)$. Burada C sabitini x-dən asılı $C = C(x)$ funksiyası hesab edək, onda

$$y = C(x)(x^2+1). \qquad (7)$$

y-in bu ifadəsini (5) tənliyində yerinə yazsaq alarıq

$$C'(x)(x^2+1) + 2xC(x) - \frac{2x}{x^2+1}C(x)(x^2+1) = x^2+1.$$

Buradan $C'(x) = 1$, yaxud $C(x) = x + C$. Bu həlli (7) bərabərliyində yerinə yazdıqda (5) tənliyinin həllini alarıq

$$y = (x+C)(x^2+1).$$

5.Diferensial hesabının əsas teoremləri.

Roll teoremi. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, həmin parçanın bütün daxili nöqtələrində diferensiallana biləndirsə və parçanın uclarında sıfra çevrilirsə $(f(a) = f(b) = 0)$, onda $[a,b]$ parçasının daxilində heç olmasa elə bir $x=c$ nöqtəsi var ki, həmin nöqtədə $f'(x)$ törəməsi sıfra çevrilir, yəni $f'(c) = 0$, $a < c < b$.

İsbatı. $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz olduğu üçün, onun həmin parçada ən böyük M və ən kiçik m qiymətləri var.

Əgər $M=m$ olarsa, $f(x)$ sabitdir, yəni arqumentin bütün qiymətlərində funksiya eyni bir qiymət alır. Belə olduqda isə parçanın bütün nöqtələrində $f'(x) = 0$ olar və teorem isbat olunar.

İndi fərz edək ki, $M \neq m$. Onda bu ədədlərdən heç olmasa biri sıfır deyil. Müəyyənlik üçün $M > 0$ olduğunu və funksiyanın bu qiyməti $x=c$ nöqtəsində aldığını qəbul edək, yəni $f(c) = M$. Qeyd edək ki, c ədədi nə a və nə də b ədədinə bərabər deyildir (çünki şərtə əsasən $f(a) = f(b) = 0$).

$f(c)$ ədədi funksiyanın ən böyük qiyməti olduğundan, istər

$\Delta x > 0$ və istərsə $\Delta x < 0$ olduqda $f(c+\Delta x) - f(c) \le 0$ olmalıdır.

Buradan $\Delta x > 0$ olduqda $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0$, $(1')$

$\Delta x < 0$ olduqda $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \ge 0$ $(1'')$

alınar. Teoremin şərtinə əsasən $x = c$ nöqtəsində törəmə vardır, ona görə də $\Delta x \to 0$ şərtində limitə keçsək

$\Delta x > 0$ olduqda $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0$, $\Delta x < 0$ olduqda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \ge 0$$

alarıq.

Digər tərəfdən $f'(c) \le 0$ və $f'(c) \ge 0$ münasibətləri yalnız $f'(c) = 0$ olduqda uyuşa bilərlər. Deməli, $[a,b]$ parçasında elə c nöqtəsi var ki, həmin nöqtədə $f'(x)$ sıfra bərabərdir. Teorem isbat olundu.

Qeyd. $[a,b]$ parçasının uclarında sıfra çevrilməyən, lakin bərabər qiymətlər alan $(f(a) = f(b))$ diferensiallana bilən funksiyalar üçün də isbat etdiyimiz teoremin hökmü doğrudur.

Laqranj teoremi**.** Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz və bu parçanın bütün daxili nöqtələrində diferensiallana biləndirsə, onda $[a,b]$ parçasının daxilində ən azı elə bir c nöqtəsi tapılar ki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), \quad a < c < b \qquad (2)$$

olar.

İsbatı. $[a,b]$ parçasında

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \qquad (3)$$

bərabərliyi ilə təyin olunmuş köməkçi $F(x)$ funksiyasına baxaq. Asanlıqla görmək olar ki, $F(x)$ funksiyası: 1) $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir (kəsilməz $f(x)$ və xətti $f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$

funksiyaların fərqi kimi); 2) $[a,b]$ parçasının daxilində diferensiallanandır

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a};$$

3) parçanın uclarında sıfra çevrilir, yəni $F(a)=0, F(b)=0.$

Deməli, $F(x)$ funksiyasına Roll teoremini tətbiq etmək olar. Bu teoremə əsasən parça daxilində elə bir $x=c$ nöqtəsi var ki, $F'(c)=0$, yəni

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Buradan alırıq ki,

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

Teorem isbat olundu.

Koşi teoremi. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında kəsilməz və onun bütün daxili nöqtələrində diferensiallana biləndirlər, bundan başqa $g'(x)$ törəməsi parçanın heç bir daxili nöqtəsində sıfra çevrilmir. Onda $[a,b]$ parçasının daxilində elə bir c nöqtəsi tapılar ki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a<c<b \qquad (3)$$

olar.

İsbatı. Əvvəlcə qeyd edək ki, $g(b)-g(a)\neq 0$, çünki əks halda $g(b)$ və $g(a)$ bərabər olar, onda Roll teoreminə əsasən parçanın daxilində elə bir c nöqtəsi var ki, $g'(c)=0$. Bu isə teoremin $g'(x)\neq 0$ şərtinə ziddir.

Köməkçi funksiya düzəldək

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right).$$

Asanlıqla görmək olar ki, $F(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında Roll teoreminin bütün şərtlərini ödəyir. Doğrudan da, $F(x)$ $[a,b]$-da kəsilməzdir, (a, b)-da diferensiallanandır və $F(a)=F(b)=0$. Ona görə də a və b ədədləri arasında elə bir $x=c$ nöqtəsi var ki, $F'(c)=0$ $(a<c<b)$. Digər tərəfdən

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x).$$

Deməli,

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0.$$

$g'(c)\neq 0$ olduğunu nəzərə alsaq buradan (4) düsturunu alarıq.

ƏDƏBİYYAT

1. R. Məmmədov. Ali riyaziyyat kuru, I hissə, «Maarif», Bakı, 1978., II hissə 1981, III hissə 1984.

2. Məsimova S.N. Ali riyaziyyatın əsasları. Bakı, Yeni Nəsil, 2006.

3. Piskunov N.S. Diferensial və inteqral hesabı. Bakı. Maarif, I,II c., 1965.

4. Данго П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая юкола, в 2-х частях, 1986.

5. Кудряцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., Наука, 1989.

6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М., Наука, 1964.

7. Общий курс высшей математики для экономистов. Под ред. Ермакова В.И.М., Инфра –М, 2008.

8. Сборник задач по высшей математике для экономистов. Под ред. Ермакова В.И.М., Инфра –М, 2008.

9. Шипачев В.С. Высшая математика. М., Высшая школа, 1990.