Giriş

Aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \tag{1}$$

$$y(0) + \omega y(\pi) = 0,$$

$$\overline{\omega} y'(0) + \propto y(\pi) + y'(\pi) = 0, \tag{2}$$

burada $q(x) \in L_2\,[0,\pi]$ həqiqi funksiya, ω istənilən kompleks ədəd, $\propto$ isə ixtiyari həqiqi ədəddir.

Tərif. λ parametrinin (1), (2) məsələsinin trivial olmayan həllinin varlığını təmin edən qiymətlərinə bu məsələnin məxsusi ədədləri, uyğun həllərə isə məxsusi funksiyaları deyilir. Müəyyən λ_0 məxsusi ədədinə uyğun xətti asılı olmayan məxsusi funksiyaların sayına bu məxsusi ədədin təkrarlanma dərəcəsi deyilir.

Aydındır ki, $\omega = 0$ olduqda (2) sərhəd şərtləri ayrılan sərhəd şərtlərinə çevrilir. Bu halda (1), (2) məsələsinin məxsusi ədədlərinin sadə olması, yəni təkrarlanma dərəcəsinin 1-ə bərabər olması klassik faktdır (məs. bax: [1]).

$\omega \neq 0$ olduqda (2) şərtləri ayrılmayan sərhəd şərtləri olur. Periodik $(\omega = -1, \propto = 0)$ və antiperiodik $(\omega = 1, \propto = 0)$ sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanma meyarı [2] kitabında verilmişdir.

Bu buraxılış işində $\omega \neq 0$ olduqda (1), (2) məsələlərinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanması araşdırılmışdır. Eyni zamanda bu məsələnin xarakteristik funksiyasının sıfırlarının təkrarlanma meyarı da verilmiş və isbat edilmişdir. Buraxılış içində aşağıdakı əsas nəticə alınmışdır.

Teorem. *(1), (2) sərhəd məsələsinin λ_0 məxsusi ədədinin təkrarlanan (həmçinin λ_0 ədədinin (1),(2) məsələsinin xarakteristik funksiyasının təkrarlanan sıfrı) olması üçün zəruri və kafi şərti ω-nın sıfırdan fərqli həqiqi ədəd olması və*

$$s(\lambda_0,\pi) = \propto c(\lambda_0,\pi) + c'(\lambda_0,\pi) = 0$$

olmasıdır, burada $c(\lambda,x)$ *və* $s(\lambda,x)$ (1) *differensial tənliyinin*

$$c(\lambda,0) = s'(\lambda,0) = 1,$$
$$c'(\lambda,0) = s(\lambda,0) = 0 \qquad (3)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həlləridir.

§1.Köməkçi faktlar

Asanlıqla göstərmək olar ki, $c\,(\lambda,x)$ *vəə* $s\,(\lambda,x)$ həllərinin Vronski determinantı 1-ə bərabərdir. Doğrudan da,

$$W\{c(\lambda,x),(\lambda,x)\} = \begin{vmatrix} c(\lambda,x) & s(\lambda,x) \\ c'(\lambda,x) & s'(\lambda,x) \end{vmatrix} = c(\lambda,x)s'(\lambda,x) -$$

$$-c'(\lambda,x)s(\lambda,x)=c(\lambda,0)s'(\lambda,0)-c'(\lambda,0)s(\lambda,o)=1\ . \qquad (4)$$

Deməli, $c(\lambda,x)\ v\partial ə\ s(\lambda,x)$ xətti asılı olmayan həllərdir. Buna görə (1) tənliyinin istənilən $y(\lambda,x)$ həlli bu həllərin xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilər:

$$y\ (\lambda,x)=C_1(\lambda,x)+C_2s\ (\lambda_1x),$$

burada c_1,c_2 istənilən sabitlərdir. Bu həlli (2) sərhəd şərtlərində yerinə yazaq,

$$C_1\,c(\lambda,0)+C_2s(\lambda,0)+\omega C_1c(\lambda,\pi)+\omega C_2s(\lambda,\pi)=0$$

$$\overline{\omega}C_1c'(\lambda,o)+\ \overline{\omega}C_2s'(\lambda,0)+\propto C_1c(\lambda,\pi)+\propto C_2s(\lambda,\pi)+$$

$$+C_1c'(\lambda,\pi)+C_2s'(\lambda,\pi)=0$$

(3) şərtlərini nəzərə alsaq, $C_1\ \ v\partial ə\, C_2$ $-$yə nəzərən aşağıdakı xətti tənliklər sistemini alarıq.

$$\begin{cases} C_1[1+\omega c(\lambda,\pi)]+\omega C_2s(\lambda,\pi)=0 \\ C_1[\propto c(\lambda,\pi)+c'(\lambda,\pi)]+C_2[\overline{\omega}+\propto s(\lambda,\pi)+s'(\lambda,\pi)]=0 \end{cases}$$