Triqonometrik Furye sırasının nöqtədə və müntəzəm yığılması

Triqonometrik Furye sırası

Triqonometrik Furye sırası dedikdə aşağıdakı ortoqonal sistem üzrə yazılmış Furye sırası başa düşülür :

$$\frac{1}{2}, \cos kx, \sin kx, \dots \quad (1)$$

bu sistemin ortoqonal olması, onun ixtiyari iki funksyasının skalyar hasilinin 0 olmasından aydındır. Belə ki ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0 \ \ (k \neq m; \ \ k, m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx \, dx = 0 \ \ (k = 0, 1, 2 \dots; \ \ m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = 0 \ \ (k \neq m; \ \ k, m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin mx \, dx = 0 \ \ (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos mx \, dx = 0 \ \ (k, m = 0, 1, 2, \dots).$$

bərabərlikləri göstərir ki, (1) sistemi ortoqonal sitemdir . (1) sistemini normallaşdırmaq da mümkündür . Bu sistemi normallaşdırmaq üçün onun elementlərini uyğun normalarına bölmək kifayətdir .

$$\|\cos kx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} cos^2\, kx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) \, dx = \pi + \frac{1}{4} \sin 2kx \, |_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$\|\sin kx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} sin^2\, kx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) \, dx = \pi - \frac{1}{4} \sin 2kx \, |_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$\left\|\frac{1}{2}\right\|^{2} = \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2})^{2}\ dx = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{2}$$

onda aşağıdakı sistem ortonormal olar :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

Hə indi (1) sistemi üzrə yazılmış aşağıdakı klassik triqonometrik sıraya baxaq :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mathrm{kx} + b_{\mathrm{k}} \sin \mathrm{kx}) \ \ (1)$$

bu sıranın n – ci xüsusi cəmi aşağıdakı kimi bir triqonometrik çoxhədli olar :

$$\mathrm{T_n}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\mathrm{k}} \cos \mathrm{kx} + b_{\mathrm{k}} \sin \mathrm{kx})$$

Əgər (1) triqonometrik sırası $\mathcal{R}$ –də yığılandırsa onda aydındır ki, (hədlərinin *cos* və *sin* dan ibarət olmasına görə) bu sıranın cəmi $\mathcal{R}$ - də 2π periodikdir. Bu prosesi, verilmiş (1) triqonometrik sırası uyğun 2π periodik funksya verir kimi izah edək (məncə buna heç nə mane olmur). Hə indi isə gəlin bu prosesi əksinə yerinə yetirək bələ ki, fərz edək bizə hansısa bir 2π periodik kəsilməz f(x) funksya verilib ($\mathcal{R}$ –də) . Və deyilir ki bu funksyanı (1) sistemi üzrə ayır. Ahhhaaa !!! Hə artıq Furye sırası anlayışı bizim köməyimizə gəlməlidi niyəmi ?

- Çünki Furye sırası məhz buna qulluq eliyir.
- Necə ?
- Hə indi bu suala cavab ataraq :

Qeyd olaraq onu eləmək istiyirəm ki, “marafon”umuzun ardında mən *triqonometrik Furye sırası* əvəzinə Triqonometrik olan Furye sırası ifadəsini işlədəcəm … Yaxşı ! Yaxşı ! söylənməyin zarafat idi … *Furye sırası* ifadəsini istifadə edəcəm .

Tərif : Verilmiş f(x) funksyasının Furye sırası , ona qarşı qoyulmuş triqonometrik sıradır

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\mathrm{k}} \cos \mathrm{kx} + b_{\mathrm{k}} \sin \mathrm{kx}) \quad \mathbf{(F)}$$

o vaxt ki, aşağıdakı inteqrallar tapıla olsun :

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

Furye sırasının orta kvadratik yığılması

$L_2^c[-\pi,\pi]$ fəzasından bir f(x) funksyası götürək. Bildiyimiz kimi $L_2^c[-\pi,\pi]$ fəzasından olan ixtiyari iki funksya üçün skalyar hasil aşağıdakı kimi yazılır :

$$\big(1(x), 2(x)\big) = \int_{-\pi}^{\pi} 1(x)\, 2(x) dx \ .$$

$$\mathrm{S_n}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_\mathrm{k}\cos \mathrm{kx} + b_\mathrm{k}\sin \mathrm{kx}) \text{ cəminə ,}$$

Furye sırasının n-ci xüsusi cəmi deyilir (bildiyimiz səralarda olduğu kimi).

Teorem(orta kvadratik yığılma) : İstənilən $f \in L_2^c[-\pi,\pi]$ funksyasının Furye sırası onun özünə $L_2^c[-\pi,\pi]$ fəzasının normasında (yuxarıda yazmış olduğu skalyar hasilin doğurduğu normada) , yəni orta kvadratik mənada yığılır :

$$\|f(x) - S_n(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]\, dx} \to 0\,,\ n \to \infty \text{ və ya}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\cos kx + b_k\cos kx)$$

və Parserval bərabərliyi ödənir :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \quad (\boldsymbol{P})$$

Orta kvadratik yığılmanı aşağıdakı kimi kompleks şəkildə də yazmaq olar :

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{haradaki ,}$$